Владимир Попов[1], *Иван Слюсарев*[2]

ЕДИНСТВЕННАЯ ТРЕХЗНАЧНАЯ $L_{\supset\neg}$-ЛОГИКА С ОДНИМ ВЫДЕЛЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ, ЯВЛЯЮЩАЯСЯ ПАРАНОРМАЛЬНОЙ И РЕГУЛЯРНОЙ $L_{\supset\neg}$-ЛОГИКОЙ С КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАЦИЕЙ

Аннотация. Доказано, что $Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 0)\rangle)$ есть единственная трехзначная $L_{\supset\neg}$-логика с одним выделенным значением, являющаяся паранормальной и регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией.

Ключевые слова: $L_{\supset\neg}$-логика, паранепротиворечивая $L_{\supset\neg}$-логика, параполная $L_{\supset\neg}$-логика, паранормальная $L_{\supset\neg}$-логика.

Vladimir Popov, Ivan Slusarev

THE ONLY THREE-VALUED $L_{\supset\neg}$-LOGIC WITH ONE DESIGNATED VALUE WHICH IS A PARANORMAL AND REGULAR $L_{\supset\neg}$-LOGIC WITH CLASSICAL IMPLICATION

Abstract. It is proven that $Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 0)\rangle)$ is the only three-valued $L_{\supset\neg}$-logic with one designated value which is a paranormal and regular $L_{\supset\neg}$-logic with classical implication.

Keywords: $L_{\supset\neg}$-logic, paraconsistent $L_{\supset\neg}$-logic, paracomplete $L_{\supset\neg}$-logic, paranormal $L_{\supset\neg}$-logic.

Для цитирования: *Попов В. М., Слюсарев И. Ю.* Единственная трехзначная $l_{\supset\neg}$-логика с одним выделенным значением, являющаяся паранормальной и регулярной $l_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией // Логико-философские штудии. 2022. Т. 20, № 4. С. 396–412. DOI: `10.52119/LPHS.2022.59.70.003`.

Главный результат, полученный в этой статье, — теорема, гласящая, что $Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 0)\rangle)$ есть единственная трехзначная $L_{\supset\neg}$-логика с од-

[1] *Попов Владимир Михайлович* — кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Vladimir Popov, Ph.D, associate professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
`pphiloslog@mail.ru`

[2] *Слюсарев Иван Юрьевич* — магистрант кафедры логики философского факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
Ivan Slusarev, master student, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
`ivan.slusarev@mail.ru`

ним выделенным значением, являющаяся паранормальной и регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией.

В основе указанного результата лежат: (1) теорема 3 из (Попов 2021a), утверждающая, что множество всех трехзначных $L_{\supset\neg}$-логик с одним выделенным значением, каждая из которых является паранепротиворечивой и регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией, равно шестиэлементному множеству

$$\{Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle), Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle),\\ Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle), Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle),\\ Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,0)\rangle), Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,0,1/2)\rangle)\};$$

(2) лемма 5 из предлагаемой статьи, утверждающая, что ни одна $L_{\supset\neg}$-логика из

$$\{Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle), Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle),\\ Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle), Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle),\\ Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,0,1/2)\rangle)\}$$

не является параполной $L_{\supset\neg}$-логикой, (3) лемма 6 из предлагаемой статьи, утверждающая, что $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,0)\rangle)$ есть параполная $L_{\supset\neg}$-логика.

Основной текст статьи состоит из трех частей, первая из которых выполняет функцию введения. Вторая часть содержит доказательства упомянутых лемм 5 и 6, а в третьей части получен сформулированный выше главный результат.

Часть 1

Будем использовать стандратно определяемый пропозициональный язык $L_{\supset\neg}$, алфавит которого есть множество $\{\supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, ...\}$ символов ($p_1, p_2, p_3, ...$ являются пропозициональными переменными языка $L_{\supset\neg}$,) и (— технические символы языка $L_{\supset\neg}$, $\supset$ — бинарная логическая связка языка $L_{\supset\neg}$,$\neg$ — унарная логическая связка языка $L_{\supset\neg}$). Индуктивное определение $L_{\supset\neg}$-формулы таково, что всякая $L_{\supset\neg}$-формула есть слово в алфавите языка $L_{\supset\neg}$, которое является пропозициональной переменной языка $L_{\supset\neg}$, или для некоторой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для некоторой $L_{\supset\neg}$-формулы B является словом $(A \supset B)$ в алфавите языка $L_{\supset\neg}$, или для некоторой $L_{\supset\neg}$-формулы A является словом $(\neg A)$ в алфавите языка $L_{\supset\neg}$.

Соглашение 1. Правило modus ponens в $L_{\supset\neg}$ обозначаем через $MP_{L_{\supset\neg}}$.

Обычным образом определяются (а) множество $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутое относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$, (б) множество $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутое относительно правила пропозициональной подстановки в $L_{\supset\neg}$.

Определение 1. Называем $L_{\supset\neg}$-логикой множество $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутое относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$ и относительно правила пропозициональной подстановки в $L_{\supset\neg}$.

Определение 2. Называем T теорией $L_{\supset\neg}$-логики L, если L есть $L_{\supset\neg}$-логика, T есть множество $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутое относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$, $L \subseteq T$.

Определение 3. Противоречивой теорией $L_{\supset\neg}$-логики L называем такую теорию T $L_{\supset\neg}$-логики L, что для некоторой $L_{\supset\neg}$-формулы A верно: $A \in T$ и $(\neg A) \in T$.

Определение 4. Паранепротиворечивой теорией $L_{\supset\neg}$-логики L называем противоречивую теорию T $L_{\supset\neg}$-логики L, удовлетворяющую условию: $A \notin T$ для некоторой $L_{\supset\neg}$-формулы A.

Определение 5. Паранепротиворечивой $L_{\supset\neg}$-логикой называем такую $L_{\supset\neg}$-логику L, что существует паранепротиворечивая теория $L_{\supset\neg}$-логики L.

Определение 6. Полной теорией $L_{\supset\neg}$-логики L называем такую теорию T $L_{\supset\neg}$-логики L, что для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: $A \in T$ или $(\neg A) \in T$.

Определение 7. Неполной теорией $L_{\supset\neg}$-логики L называем такую теорию T $L_{\supset\neg}$-логики L, которая не является полной теорией $L_{\supset\neg}$-логики L.

Определение 8. Параполной теорией $L_{\supset\neg}$-логики L называем такую неполную теорию T $L_{\supset\neg}$-логики L, что всякая полная теория $L_{\supset\neg}$-логики L, включающая T, равна множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул.

Определение 9. Параполной $L_{\supset\neg}$-логикой называем такую $L_{\supset\neg}$-логику L, что существует параполная теория $L_{\supset\neg}$-логики L.

Определение 10. Паранормальной $L_{\supset\neg}$-логикой называем такую $L_{\supset\neg}$-логику, которая является паранепротиворечивой $L_{\supset\neg}$-логикой и параполной $L_{\supset\neg}$-логикой.

Разъясняя используемую здесь терминологию, заметим, что термин «регулярная $L_{\supset\neg}$-логика» используется для характеризации $L_{\supset\neg}$-логики, включающейся в множество всех классических тавтологий импликативно-негативного языка $L_{\supset\neg}$, а термин «$L_{\supset\neg}$-логика с классической импликацией» используется для характеризации такой $L_{\supset\neg}$-логики L, что для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A, не содержащей вхождений $\neg$, верно следующее: $A \in L$ тогда и только тогда, когда A есть классическая тавтология импликативно-негативного языка $L_{\supset\neg}$.

Определение 11. Называем $L_{\supset\neg}$-матрицей упорядоченную четверку $\langle M, N, f, g\rangle$, где M есть непустое множество, N есть подмножество множества M, f есть бинарная операция на M, g есть унарная операция на M (при этом M называем носителем $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M, N, f, g\rangle$, N называем выделенным множеством $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M, N, f, g\rangle$, f называем первой операцией $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M, N, f, g\rangle$, а g называем второй операцией $L_{\supset\neg}$-матрицы $\langle M, N, f, g\rangle$).

Замечание 1. В предлагаемой статье «операция» и «всюду определенная операция» — синонимы.

Определение 12. Оценкой языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K называем отображение множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в носитель $L_{\supset\neg}$-матрицы K.

Можно доказать справедливость следующего замечания 2.

Замечание 2. Для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы K существует единственное отображение $|\cdot|^K$ множества всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle A, w\rangle$, где A есть $L_{\supset\neg}$-формула и w есть оценка языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице, в носитель $L_{\supset\neg}$-матрицы K, выполняющее следующие три условия: (1) для всякой пропозициональной переменной q языка $L_{\supset\neg}$ и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K верно, что $|q|_v^K = v(q)$, (2) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A, для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K $|(A \supset B)|_v^K = (|A|_v^K f |B|_v^K)$, где f есть первая операция $L_{\supset\neg}$-матрицы K, (3) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K $|(\neg A)|_v^K = g(|A|_v^K)$, где g есть вторая операция $L_{\supset\neg}$-матрицы K.

Определение 13. Называем $L_{\supset\neg}$-формулой, общезначимой в $L_{\supset\neg}$-матрице K, такую $L_{\supset\neg}$-формулу A, что для всякой оценки v языка $L_{\supset\neg}$ в $L_{\supset\neg}$-матрице K $|A|_v^K$ принадлежит выделенному множеству $L_{\supset\neg}$-матрицы K.

Разумеется, что для всякой $L_{\supset\neg}$-матрицы существует единственное множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в этой $L_{\supset\neg}$-матрице.

Соглашение 2. Множество всех $L_{\supset\neg}$-формул, общезначимых в $L_{\supset\neg}$-матрице K, обозначаем через $Tr(K)$.

Определение 14. Называем $L_{\supset\neg}$-матрицей, адекватной $L_{\supset\neg}$-логике L, такую $L_{\supset\neg}$-матрицу K, что для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A верно следующее: $A \in L$ тогда и только тогда, когда A есть $L_{\supset\neg}$-формула, общезначимая в $L_{\supset\neg}$-матрице K.

Определение 15. Называем трехзначной $L_{\supset\neg}$-логикой с одним выделенным значением такую $L_{\supset\neg}$-логику, что существует адекватная ей $L_{\supset\neg}$-матрица с трехэлементным носителем и одноэлементным выделенным множеством.

Ясно, что $\{\langle 1,1,1\rangle, \langle 1,1/2,x\rangle, \langle 1,0,y\rangle, \langle 1/2,1,1\rangle, \langle 1/2,1/2,1\rangle, \langle 1/2,0,z\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 0,1/2,t\rangle, \langle 0,0,1\rangle\}$, где $x, y, z, t \in \{1, 1/2, 0\}$, является бинарной операцией на $\{1, 1/2, 0\}$.

Соглашение 3. Условимся обозначать эту операцию через $\supset(x, y, z, t)$.

Соглашение 4. Условимся обозначать упорядоченную тройку $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(x, y, z, t)\rangle$, где $x, y, z, t \in \{1, 1/2, 0\}$, через $M(x, y, z, t)$.

Ясно, что $\{\langle 1, a\rangle, \langle 1/2, b\rangle, \langle 0, c\rangle\}$, где $a, b, c \in \{1, 1/2, 0\}$, является унарной операцией на $\{1, 1/2, 0\}$.

Соглашение 5. Условимся обозначать эту операцию через $\neg(a, b, c)$.

Легко убедиться в справедливости следующего замечания 3.

Замечание 3. Для всяких x, y, z, t, a, b, c из $\{1, 1/2, 0\}$ $\langle\{1, 1/2, 0\}, \{1\}, \supset(x, y, z, t), \neg(a, b, c)\rangle = \langle M(x, y, z, t)\neg(a, b, c)\rangle$.

Замечание 4. В доказательствах часто будет использоваться тот простой факт, что для всякого x: $x \in \{1\}$ тогда и только тогда, когда $x = 1$; в дальнейшем ссылки на указанный факт делаться не будут.

Нам потребуется исчисление И гильбертовского типа.

Язык этого исчисления есть $L_{\supset\neg}$. Аксиомами исчисления И являются все те и только те $L_{\supset\neg}$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих двух видов (здесь A, B, C есть $L_{\supset\neg}$-формулы): (1) $(A \supset (B \supset A))$, (2) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$. Правило modus ponens в $L_{\supset\neg}$ есть единственное правило исчисления И.

Соглашение 6. Множество всех целых положительных чисел обозначаем через $\mathbb{N}$.

Соглашение 7. Обозначаем n-членную ($n \in \mathbb{N}$) последовательность $L_{\supset\neg}$-формул с первым членом A_1, ..., с n-ным членом A_n через $A_1, \dots, A_n$.

Определение 16. *Называем* И-*выводом* $L_{\supset\neg}$-*формулы* A *из множества* Γ $L_{\supset\neg}$-*формул такую* n-*членную* ($n \in \mathbb{N}$) *последовательность* $A_1, \dots, A_n$ $L_{\supset\neg}$-*формул, что* $A = A_n$ *и для всякого* i, *которое принадлежит* $\mathbb{N}$ *и меньше или равно* n, *верно следующее:* $A_i \in \Gamma$, *или* A_i *есть аксиома исчисления* И, *или существует* k *из* $\mathbb{N}$ *и существует* l *из* $\mathbb{N}$, *удовлетворяющие условию:* $k, l < i$ *и* $\langle A_k, A_l, A_i\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$.

Определение 17. Называем отношением И-*выводимости множество всех упорядоченных пар, каждая упорядоченная пара* $\langle X, Y\rangle$ *из которых такова, что существует* И-*вывод* $L_{\supset\neg}$-*формулы* Y *из множества* X $L_{\supset\neg}$-*формул.*

Ввиду того что существует единственное отношение И-выводимости, корректно следующее соглашение 8.

Соглашение 8. Отношение И-выводимости обозначаем через И$\vdash$.

Соглашение 9. Условимся, что Γ И$\vdash$ A (где Γ есть множество $L_{\supset\neg}$-формул, а A есть $L_{\supset\neg}$-формула) является сокращением для $\langle\Gamma, A\rangle \in$ И$\vdash$.

Можно доказать следующую теорему дедукции для И-выводов.

Теорема 1 (дедукции для И-выводов)**.** Для всякого множества Γ $L_{\supset\neg}$-формул, для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B: если $\Gamma \cup \{A\}$ И$\vdash$ B, то Γ И$\vdash$ $A \supset B$).

Сформулируем лемму 1, сделав предварительно следующее

Замечание 5. Для всякого множества Γ $L_{\supset\neg}$-формул существует единственное множество всех таких $L_{\supset\neg}$-формул, для каждой из которых существует И-вывод из Γ.

Лемма 1. Пусть

$$
\begin{aligned}
Log \in \{&Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle),\\
&Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle),\\
&Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle),\\
&Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle),\\
&Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,0,1/2)\rangle)\}.
\end{aligned}
$$

Если K есть теория $L_{\supset\neg}$-логики Log и A есть $L_{\supset\neg}$-формула, то $\{E \mid K \cup \{A\} \text{ И}\vdash E\}$ *есть теория $L_{\supset\neg}$-логики Log.*

Очевидное доказательство леммы 1 здесь не приводим.

Лемма 2. Пусть

$$
\begin{aligned}
Log \in \{&Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle),\\
&Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle),\\
&Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle),\\
&Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle),\\
&Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,0,1/2)\rangle)\}
\end{aligned}
$$

и K есть теория $L_{\supset\neg}$-логики Log. Для всякого n из $\mathbb{N}$, для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_1, ..., для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_n: <u>если</u> последовательность $A_1, \ldots, A_n$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно n, верно следующее: $A_i \in K$, или A_i есть аксиома исчисления И, *или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A_k, A_l, A_i\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, <u>то</u> $A_n \in K$.*

Доказательство леммы 2 проводим методом возвратной индукции.

Индукционный шаг. Для всякого n из $\mathbb{N}$: <u>если</u> для всякого m, которое принадлежит множеству $\mathbb{N}$ и строго меньше n, для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_1, ..., для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_m верно, что если последовательность $A_1, \ldots, A_m$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно m, $A_i \in K$, или A_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A_k, A_l, A_i\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $A_m \in K$, <u>то</u> для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_1, ..., для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_n верно, что если последовательность $A_1, \ldots, A_n$

$L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно n, $A_i \in K$, или A_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A_k, A_l, A_i \rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $A_n \in K$.

Докажем индукционный шаг.

(1)
$$\begin{aligned} Log \in \{&Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle),\\ &Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle),\\ &Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle),\\ &Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle),\\ &Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,0,1/2)\rangle)\}\end{aligned}$$

и K есть теория $L_{\supset\neg}$-логики Log (условие).

(2) $n_0 \in \mathbb{N}$ (допущение).

(3) Для всякого m, которое принадлежит множеству $\mathbb{N}$ и строго меньше n_0, для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_1, ..., для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_m верно, что если последовательность $A_1, \dots, A_m$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно m, $A_i \in K$, или A_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A_k, A_l, A_i \rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $A_m \in K$ (допущение).

(4) $A'_1, \dots, A'_{n_0}$ есть $L_{\supset\neg}$-формулы (допущение).

(5) Последовательность $A'_1, \dots, A'_{n_0}$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно n_0, $A'_i \in K$, или A'_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A'_k, A'_l, A'_i \rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$ (допущение).

В свете утверждений (2), (5) и того, что $n_0 \leqslant n_0$, ясно, что

(6) $A'_{n_0} \in K$, или A'_{n_0} есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < n_0$ и $\langle A'_k, A'_l, A'_{n_0} \rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$.

(7) A'_{n_0} есть аксиома исчисления И (допущение).

Опираясь на утверждения (1) и (7), легко проверить (используя табличную процедуру проверки), что

(8) $A'_{n_0} \in Log$.

(9) $Log \subseteq K$ (из (1), по определению 2).

(10) $A'_{n_0} \in K$ (из (8) и (9)).

Снимая допущение (7), получаем, что

(11) если A'_{n_0} есть аксиома исчисления И, то $A'_{n_0} \in K$.

(12) Существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < n_0$ и $\langle A'_k, A'_l, A'_{n_0} \rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$ (допущение).

Пусть (13) $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$, $k_0, l_0 < n_0$, $\langle A'_{k_0}, A'_{l_0}, A'_{n_0} \rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$.

(14) $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$, $k_0, l_0 < n_0$ (из (13)).

(15) $\langle A'_{k_0}, A'_{l_0}, A'_{n_0} \rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$ (из (13)).

Опираясь на утверждения (3) и (14), получаем, что верны следующие утверждения (16) и (17).

(16) Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_1, ..., для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_{k_0} верно, что если последовательность $A_1, \dots, A_{k_0}$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно k_0, $A_i \in K$, или A_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A_k, A_l, A_i\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $A_{k_0} \in K$.

(17) Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_1, ..., для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_{l_0} верно, что если последовательность $A_1, \dots, A_{l_0}$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно l_0, $A_i \in K$, или A_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A_k, A_l, A_i\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $A_{l_0} \in K$.

Опираясь на утверждения (4), (14), (16), (17), получаем, что верны следующие утверждения (18) и (19).

(18) Если последовательность $A'_1, \dots, A'_{k_0}$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно k_0, $A'_i \in K$, или A'_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A'_k, A'_l, A'_i\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $A'_{k_0} \in K$.

(19) Если последовательность $A'_1, \dots, A'_{l_0}$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно l_0, $A'_i \in K$, или A'_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A'_k, A'_l, A'_i\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $A'_{l_0} \in K$.

В свете утверждений (5) и (14) ясно, что верны следующие утверждения (20) и (21).

(20) Последовательность $A'_1, \dots, A'_{k_0}$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно k_0, $A'_i \in K$, или A'_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A'_k, A'_l, A'_i\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$.

(21) Последовательность $A'_1, \dots, A'_{l_0}$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно l_0, $A'_i \in K$, или A'_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A'_k, A'_l, A'_i\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$.

(22) $A'_{k_0} \in K$ (из (18) и (20)).

(23) $A'_{l_0} \in K$ (из (19) и (21)).

Понятно, что (24) для всяких B, C и D: если $B \in K$, $C \in K$ и $\langle B, C, D\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $D \in K$.

(25) $A'_{n_0} \in K$ (из (15), (22), (23) и (24)).

Снимая допущение (12), получаем, что

(26) если существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < n_0$ и $\langle A'_k, A'_l, A'_{n_0}\rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $A'_{n_0} \in K$.

(27) $A'_{n_0} \in K$ (из (6), (11) и (26)).

Снимая допущения (5), (4) и обобщая, получаем, что

(28) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы $A_1, ...,$ для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A_{n_0} верно, что если последовательность $A_1, \dots, A_{n_0}$ $L_{\supset\neg}$-формул такова, что для всякого i, которое принадлежит $\mathbb{N}$ и меньше или равно n_0, $A_i \in K$, или A_i есть аксиома исчисления И, или существуют такие k и l, что $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l < i$ и $\langle A_k, A_l, A_i \rangle \in MP_{L_{\supset\neg}}$, то $A_{n_0} \in K$.

Снимая допущения (3), (2) и обобщая, завершаем доказательство индукционного шага.

Индукционный шаг доказан.

Лемма 2 доказана.

Опираясь на лемму 2, на определения 16 и 17, а также на соглашения 8 и 9, делаем вывод, что верна следующая лемма 3.

Лемма 3. Пусть

$$\begin{aligned} Log \in \{ & Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle), \\ & Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle), \\ & Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle), \\ & Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle), \\ & Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,0,1/2)\rangle)\} \end{aligned}$$

и K есть теория $L_{\supset\neg}$-логики Log.

Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: если K И$\vdash A$, *то* $A \in K$.

Часть 2

Следующая лемма 4 родственна лемме Линденбаума для классической логики высказываний.

Лемма 4. Пусть

$$\begin{aligned} Log \in \{ & Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle), \\ & Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle), \\ & Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle), \\ & Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle), \\ & Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,0,1/2)\rangle)\} \end{aligned}$$

Если K есть неполная теория $L_{\supset\neg}$-логики Log, то существует такая полная теория T $L_{\supset\neg}$-логики Log, что выполняются два условия: (I) $K \subseteq T$, (II) существует $L_{\supset\neg}$-формула, которая не принадлежит T.

Докажем лемму 4.

(1) $$Log \in \{Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1,1)\rangle), \\ Tr(\langle M(1,0,0,1), \neg(0,1/2,1)\rangle), \\ Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1)\rangle), \\ Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,1/2)\rangle), \\ Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,0,1/2)\rangle)\} \text{ (условие).}$$

(2) K есть неполная теория $L_{\supset\neg}$-логики Log (допущение).

Опираясь на утверждение (2) и на определения 6 и 7, получаем, что

(3) существует такая $L_{\supset\neg}$-формула A, что $A \notin K$.

Пусть (4) F есть $L_{\supset\neg}$-формула, $F \notin K$.

Можно доказать, что

(5) существует единственное множество всех таких теорий $L_{\supset\neg}$-логики Log, включающих K, ни одной из которых не принадлежит F.

Условимся, что

(6) $U_K = \{X | X$ есть теория $L_{\supset\neg}$-логики $Log,\ K \subseteq X,\ F \notin X\}$.

Можно доказать, что

(7) существует единственное множество всех таких упорядоченных пар $\langle X, Y\rangle$, где $X, Y \in U_K$ и $X \subseteq Y$.

Условимся, что

(8) $\preccurlyeq\, = \{\langle X, Y\rangle | X, Y \in U_K$ и $X \subseteq Y\}$.

В свете утверждений (6), (8), определения частично упорядоченного множества и того, что $U_K \neq \emptyset$ (последнее верно в силу принадлежности множеству U_K $L_{\supset\neg}$-теории K), понятно, что

(9) $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$ есть частично упорядоченное множество.

(10) Z_0 есть цепь в $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$ (допущение).

(11) $Z_0 \neq \emptyset$, $Z_0 \subseteq U_K$, для всяких X и Y из Z_0: $X \preccurlyeq Y$ или $Y \preccurlyeq X$ (из (9) и (10), по определению цепи в частично упорядоченном множестве).

(12) $Z_0 \neq \emptyset$ (из (11)).

(13) $Z_0 \subseteq U_K$ (из (11)).

(14) Для всяких X и Y из Z_0: $X \preccurlyeq Y$ или $Y \preccurlyeq X$ (из (11)).

(15) Существует X: $X \in Z_0$ (из (12)).

Пусть (16) $X_0 \in Z_0$.

Опираясь на утверждения (13) и (16), получаем, что

(17) $X_0 \in U_K$.

(18) $K \subseteq X_0$ (из (6) и (17)).

В свете утверждения (16) и того, что всякий элемент из Z_0 включается в $\bigcup Z_0$, очевидна справедливость утверждения (19).

(19) $X_0 \subseteq \bigcup Z_0$.

(20) $K \subseteq \bigcup Z_0$ (из (18) и (19)).

(21) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(22) B_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(23) $A_0 \in \bigcup Z_0$ и $(A_0 \supset B_0) \in \bigcup Z_0$ (допущение).

Опираясь на утверждение (23), получаем, что верны следующие утверждения (24) и (25).

(24) Существует такой элемент X_1 множества Z_0, что $A_0 \in X_1$.

(25) Существует такой элемент X_2 множества Z_0, что $(A_0 \supset B_0) \in X_2$.

Пусть (26) $Y_1 \in Z_0$, $A_0 \in Y_1$, $Y_2 \in Z_0$, $(A_0 \supset B_0) \in Y_2$.

(27) $Y_1 \in Z_0$, $Y_2 \in Z_0$ (из (26)).

Опираясь на утверждение (27) и на то, что Z_0 есть цепь в частично упорядоченном множестве $\langle U_K, \preccurlyeq \rangle$, получаем, используя определение цепи в частично упорядоченном множестве, что

(28) $Y_1 \preccurlyeq Y_2$ или $Y_2 \preccurlyeq Y_1$.

(29) $Y_1 \subseteq Y_2$ или $Y_2 \subseteq Y_1$ (из (8) и (28)).

(30) $A_0 \in Y_1$ и $(A_0 \supset B_0) \in Y_2$ (из (26)).

(31) ($A_0 \in Y_1$ и $(A_0 \supset B_0) \in Y_1$) или ($A_0 \in Y_2$ и $(A_0 \supset B_0) \in Y_2$) (из (29) и (30)).

(32) $Y_1 \in U_K$ и $Y_2 \in U_K$ (из (13) и (27)).

(33) Y_1 и Y_2 являются теориями $L_{\supset\neg}$-логики *Log* (из (6) и (32)).

(34) Y_1 и Y_2 являются множествами $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутыми относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$ (из (33), по определению 2).

В свете утверждений (31), (34) и определения множества $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутого относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$, понятно, что

(35) $B_0 \in Y_1$ или $B_0 \in Y_2$.

Опираясь на утверждения (27) и (35), получаем, что

(36) $B_0 \in \bigcup Z_0$.

Снимая допущения (23), (22), (21) и обобщая, получаем, что

(37) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A и для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы B: если $A \in \bigcup Z_0$ и $(A \supset B) \in \bigcup Z_0$, то $B \in \bigcup Z_0$.

Опираясь на утверждение (37), а также на тот факт, что $\bigcup Z_0$ есть множество $L_{\supset\neg}$-формул, получаем, используя определение множества $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутого относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$, что

(38) $\bigcup Z_0$ есть множество $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутое относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$.

(39) K есть теория $L_{\supset\neg}$-логики *Log* (из (2), по определению 7).

(40) $Log \subseteq K$ (из (39), по определению 2).

(41) $Log \subseteq \bigcup Z_0$ (из (20) и (40)).

(42) $\bigcup Z_0$ есть теория $L_{\supset\neg}$-логики *Log* (из (38), (41), по определению 2).

(43) $F \in \bigcup Z_0$ (допущение).

Ввиду этого допущения ясно, что

(44) существует такой элемент X множества Z_0, что $F \in X$.

Пусть (45) $X' \in Z_0$ и $F \in X'$.

(46) $X' \in Z_0$ (из (45)).

(47) $X' \in U_K$ (из (13) и (46)).

(48) $F \notin X'$ (из (6) и (47)).

(49) $F \in X'$ (из (45)).

Утверждение (49) противоречит утверждению (48). Следовательно, неверно допущение (43). Но тогда

(50) $F \notin \bigcup Z_0$.

(51) $\bigcup Z_0 \in U_K$ (из (6), (20), (42), (50)).

Опираясь на утверждения (8), (13), (51) и на то, что всякий элемент из Z_0 включается в $\bigcup Z_0$, приходим к выводу о том, что

(52) для всякого X из Z_0 верно, что $X \preccurlyeq \bigcup Z_0$.

Прервем доказательство леммы 4 для того, чтобы напомнить следующие два определения.

Определение 18. α есть верхняя грань для M в $\langle U, R\rangle$, если $\langle U, R\rangle$ есть частично упорядоченное множество, $M \subseteq U$, $\alpha \in U$ и для всякого x из M верно, что $xR\alpha$.

Определение 19. α есть максимальный элемент в $\langle U, R\rangle$, если $\langle U, R\rangle$ есть частично упорядоченное множество, $\alpha \in U$ и не существует такой x, что $x \neq \alpha$ и αRx.

Продолжим доказательство леммы 4.

(53) $\bigcup Z_0$ есть верхняя грань для Z_0 в $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$ (из (9), (13), (51), (52), по определению 18).

(54) Существует верхняя грань для Z_0 в $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$ (из (53)).

Снимая допущение (10) и обобщая, получаем, что

(55) для всякой цепи Z в $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$ существует верхняя грань для Z в $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$.

Вспомним теперь лемму Цорна.

Лемма (Цорна)**.** Для всякого частично упорядоченного множества $\mathbb{Q}$: если для всякой цепи Z в $\mathbb{Q}$ существует верхняя грань для Z в $\mathbb{Q}$, то существует максимальный элемент в $\mathbb{Q}$.

Вернемся к доказательству леммы 4.

Опираясь на утверждения (9) и (55), получаем, по лемме Цорна, что

(56) существует максимальный элемент в $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$.

Пусть (57) $\mathbb{M}$ есть максимальный элемент в $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$.

(58) $\mathbb{M} \in U_K$ (из (9), (57), по определению 19).

(59) $F \notin \mathbb{M}$ (из (6) и (58)).

(60) $\mathbb{M}$ есть теория $L_{\supset\neg}$-логики Log (из (6) и (58)).

(61) $Log \subseteq \mathbb{M}$ (из (60), по определению 2).

(62) $K \subseteq \mathbb{M}$ (из (6) и (58)).

Покажем теперь, что верно следующее утверждение (63).

(63) Для всяких $L_{\supset\neg}$-формул A и B: если $((A \supset B) \supset B) \in \mathbb{M}$, то $A \in \mathbb{M}$ или $B \in \mathbb{M}$.

(63.1) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(63.2) B_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(63.3) $((A_0 \supset B_0) \supset B_0) \in \mathbb{M}$ (допущение).

(63.4) $A_0 \notin \mathbb{M}$ и $B_0 \notin \mathbb{M}$ (допущение).

Опираясь на утверждения (1), (60), (63.1) и (63.2), получаем, применяя лемму 1, что

(63.5) $\{E|\ \mathbb{M}\cup\{A_0\}$ И$\vdash E\}$ и $\{E|\ \mathbb{M}\cup\{B_0\}$ И$\vdash E\}$ являются теориями $L_{\supset\neg}$-логики Log.

В свете утверждения (62) ясно, что

(63.6) $K \subseteq \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ и $K \subseteq \mathbb{M} \cup \{B_0\}$.

Очевидно, что

(63.7) $\mathbb{M} \cup \{A_0\} \subseteq \{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\}$ и $\mathbb{M} \cup \{B_0\} \subseteq \{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\}$.

(63.8) $K \subseteq \{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\}$ и $K \subseteq \{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\}$ (из (63.6) и (63.7)).

(63.9) Если $F \notin \{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\}$, то $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\} \in U_K$ (из (6), (63.5), (63.8)).

(63.10) Если $F \notin \{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\}$, то $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\} \in U_K$ (из (6), (63.5), (63.8)).

Понятно, что верны следующие утверждения (63.11)–(63.14).

(63.11) $\mathbb{M} \subseteq \{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\}$.

(63.12) $\mathbb{M} \subseteq \{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\}$.

(63.13) $A_0 \in \{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\}$.

(63.14) $B_0 \in \{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\}$.

(63.15) Если $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\} \in U_K$, то $\mathbb{M} \preccurlyeq \{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\}$ (из (8) и (58)).

(63.16) Если $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\} \in U_K$, то $\mathbb{M} \preccurlyeq \{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\}$ (из (8) и (58)).

(63.17) $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\} \neq \mathbb{M}$ (из (63.4) и (63.13)).

(63.18) $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\} \neq \mathbb{M}$ (из (63.4) и (63.14)).

(63.19) Если $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\} \in U_K$, то неверно, что $\mathbb{M}$ есть максимальный элемент в $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$ (из (9), (63.15) и (63.17), по определению 19).

(63.20) Если $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\} \in U_K$, то неверно, что $\mathbb{M}$ есть максимальный элемент в $\langle U_K, \preccurlyeq\rangle$ (из (9), (63.16) и (63.18), по определению 19).

(63.21) $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\} \notin U_K$ (из (57) и (63.19)).

(63.22) $\{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\} \notin U_K$ (из (57) и (63.20)).

(63.23) $F \in \{E|\ \mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash E\}$ (из (63.9) и (63.21)).

(63.24) $F \in \{E|\ \mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash E\}$ (из (63.10) и (63.22)).

(63.25) $\mathbb{M} \cup \{A_0\}$ И$\vdash F$ (из (63.23)).

(63.26) $\mathbb{M} \cup \{B_0\}$ И$\vdash F$ (из (63.24)).

Опираясь на утверждения (63.25), (63.26) и учитывая, что $\mathbb{M}$ есть множество $L_{\supset\neg}$-формул, а A_0, B_0 и F являются $L_{\supset\neg}$-формулами, получаем, применяя теорему дедукции для И-выводов, что

(63.27) $\mathbb{M}$ И$\vdash$ $(A_0 \supset F)$ и $\mathbb{M}$ И$\vdash$ $(B_0 \supset F)$.

Опираясь на утверждения (1), (60), (63.27), получаем, используя лемму 3, что

(63.28) $(A_0 \supset F) \in \mathbb{M}$ и $(B_0 \supset F) \in \mathbb{M}$.

Можно проверить, что

(63.29) $(((A_0 \supset B_0) \supset B_0) \supset ((A_0 \supset F) \supset ((B_0 \supset F) \supset F))) \in Log$.

(63.30) $(((A_0 \supset B_0) \supset B_0) \supset ((A_0 \supset F) \supset ((B_0 \supset F) \supset F))) \in \mathbb{M}$ (из (61) и (63.29)).

В свете утверждения (60) и определения 2 ясно, что

(63.31) $\mathbb{M}$ есть множество $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутое относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$.

Опираясь на утверждения (63.3), (63.28), (63.30) и (63.31), получаем, что

(63.32) $F \in \mathbb{M}$.

Утверждение (63.32) противоречит утверждению (59). Следовательно, неверно допущение (63.4). Но тогда верно, что

(63.33) $A_0 \in \mathbb{M}$ или $B_0 \in \mathbb{M}$.

Снимая допущения (63.3), (63.2), (63.1) и обобщая, получаем, что для всяких $L_{\supset\neg}$-формул A и B: если $((A \supset B) \supset B) \in \mathbb{M}$, то $A \in \mathbb{M}$ или $B \in \mathbb{M}$.

Таким образом, верно утверждение (63).

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения (64).

(64) Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A $((A \supset (\neg A)) \supset (\neg A)) \in Log$.

(65) Для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A $((A \supset (\neg A)) \supset (\neg A)) \in \mathbb{M}$ (из (61) и (64)).

(66) A_0 есть $L_{\supset\neg}$-формула (допущение).

(67) $(\neg A_0)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула (из (66), по определениею $L_{\supset\neg}$-формулы).

(68) Если $((A_0 \supset (\neg A_0)) \supset (\neg A_0)) \in \mathbb{M}$, то $A_0 \in \mathbb{M}$ или $(\neg A_0) \in \mathbb{M}$ (из (63), (66) и (67)).

(69) $((A_0 \supset (\neg A_0)) \supset (\neg A_0)) \in \mathbb{M}$ (из (65) и (66)).

(70) $A_0 \in \mathbb{M}$ или $(\neg A_0) \in \mathbb{M}$ (из (68) и (69)).

Снимая допущение (66) и обобщая, получаем, что

(71) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: $A \in \mathbb{M}$ или $(\neg A) \in \mathbb{M}$.

(72) $\mathbb{M}$ есть полная теория $L_{\supset\neg}$-логики Log (из (60) и (71), по определению 6).

(73) Существует такая полная теория T $L_{\supset\neg}$-логики Log, что выполняются два условия: (I) $K \subseteq T$, (II) существует $L_{\supset\neg}$-формула, которая не принадлежит T (из (55), (62) и (72)).

Снимая допущение (2), завершаем доказательство леммы 4.

Лемма 4 доказана.

Опираясь на лемму 4 и применяя определения 8 и 9, делаем вывод, что верна следующая лемма 5.

Лемма 5. Ни одна $L_{\supset\neg}$-логика из

$$\begin{aligned}\{&Tr(\langle M(1,0,0,1),\neg(0,1,1)\rangle),\\ &Tr(\langle M(1,0,0,1),\neg(0,1/2,1)\rangle),\\ &Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,1)\rangle),\\ &Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,1/2)\rangle),\\ &Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,0,1/2)\rangle)\}\end{aligned}$$

не является параполной $L_{\supset\neg}$-логикой.

Обратимся теперь к вопросу о параполноте $L_{\supset\neg}$-логики $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle)$. Разумеется, что существует единственная оценка v языка $L_{\supset\neg}$ в $\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle$, выполняющая условие $v(q)=0$ для всякой пропозициональной переменной q языка $L_{\supset\neg}$. Обозначим эту оценку через $\mathbb{0}$. Нетрудно установить, что (i) $|p_1|_v^{\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle}=0$ и $|(\neg p_1)|_v^{\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle}=0$. Понятно, что существует единственное множество всех таких $L_{\supset\neg}$-формул, для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы A из которых $|A|_{\mathbb{0}}^{\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle}\in\{1,1/2\}$. Обозначаем это множество $L_{\supset\neg}$-формул через Q. Тогда в свете утверждения (i) ясно, что (ii) $p_1\notin Q$ и $(\neg p_1)\notin Q$. Убедившись, что Q включает $L_{\supset\neg}$-логику $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle)$ и замкнуто относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$, приходим к выводу, что (iii) Q есть теория $L_{\supset\neg}$-логики $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle)$. Ввиду утверждений (ii) и (iii) и определений 6 и 7 понятно, что (iv)‘Q есть неполная теория $L_{\supset\neg}$-логики $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle)$. Можно проверить, что (v) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: $|(p_1\supset A)|_{\mathbb{0}}^{\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle}\in\{1,1/2\}$ и $|((\neg p_1)\supset A)|_{\mathbb{0}}^{\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle}\in\{1,1/2\}$. Но тогда верно, что (vi) для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы A: $(p_1\supset A)\in Q$ и $((\neg p_1)\supset A)\in Q$. Опираясь на утверждение (vi) и применяя определения 2, 6 и определение множества $L_{\supset\neg}$-формул, замкнутого относительно $MP_{L_{\supset\neg}}$, получаем, что (vii) всякая полная теория $L_{\supset\neg}$-логики $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle)$, включающая Q, равна множеству всех $L_{\supset\neg}$-формул. (viii) Q есть параполная теория $L_{\supset\neg}$-логики $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle)$ (из (iv), (vii), по определению 8). (ix) Существует параполная теория $L_{\supset\neg}$-логики $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle)$ (из (viii)). Опираясь на утверждение (ix) и используя определение 9, приходим к следующей лемме 6.

Лемма 6. $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2),\neg(1/2,1,0)\rangle)$ есть параполная $L_{\supset\neg}$-логика.

Часть 3

В свете теоремы 3 из (Попов 2021a) (формулировка этой теоремы приведена в начале предлагаемой статьи), леммы 6 и определения 10 очевидна справедливость следующей леммы 7.

Лемма 7. $Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 0)\rangle)$ есть трехзначная $L_{\supset\neg}$-логика с одним выделенным значением, являющаяся паранормальной и регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией.

Лемма 8. Всякая трехзначная $L_{\supset\neg}$-логика с одним выделенным значением, являющаяся паранормальной и регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией, равна $Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 0)\rangle)$.

Докажем лемму 8.

(1) L есть трехзначная $L_{\supset\neg}$-логика с одним выделенным значением, являющаяся паранормальной и регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией (допущение).

Опираясь на допущение (1) и используя определение 10, получаем, что

(2) L есть трехзначная $L_{\supset\neg}$-логика с одним выделенным значением, являющаяся паранепротиворечивой и регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией.

(3)
$$\begin{aligned} L \in \{&Tr(\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle), \\ &Tr(\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 1/2, 1)\rangle), \\ &Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 1)\rangle), \\ &Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle), \\ &Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 0)\rangle), \\ &Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 0, 1/2)\rangle)\} \end{aligned}$$

(из (2), по теореме 3 из (Попов 2021a)).

Опираясь на утверждение 1 и используя определение 10, получаем, что

(4) L есть параполная $L_{\supset\neg}$-логика.

(5)
$$\begin{aligned} L \notin \{&Tr(\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 1, 1)\rangle), \\ &Tr(\langle M(1, 0, 0, 1), \neg(0, 1/2, 1)\rangle), \\ &Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 1)\rangle), \\ &Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 1/2)\rangle), \\ &Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 0, 1/2)\rangle)\} \text{ (из (4), по лемме 5).} \end{aligned}$$

(6) $L \in \{Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 0)\rangle)\}$ (из (3) и (5)).

(7) $L = Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 0)\rangle)$ (из (6)).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 8.

Лемма 8 доказана.

Следствием лемм 7 и 8 является следующая теорема.

Теорема. $Tr(\langle M(1/2, 0, 0, 1/2), \neg(1/2, 1, 0)\rangle)$ есть единственная трехзначная $L_{\supset\neg}$-логика с одним выделенным значением, являющаяся паранормальной и регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией.

Заметим, что $L_{\supset\neg}$-логика $Tr(\langle M(1/2,0,0,1/2), \neg(1/2,1,0)\rangle)$ была введена в логический дискурс в работе (Попов 2021b). В (Попов 2021b) указанная $L_{\supset\neg}$-логика была названа $\mathrm{PN}_{\supset\neg}$ и охарактеризована как единственная трехзначная $L_{\supset\neg}$-логика с одним выделенным значением, являющаяся паранормальной и регулярной $L_{\supset\neg}$-логикой с классической импликацией.

Литература

Попов 2021a — *Попов В. М.* Замечание о трехзначных паранепротиворечивых логиках с одним выделенным значением // Двенадцатые Смирновские чтения: материалы Международной научной конференции, Москва, 24–26 июня 2021 г. М.: Русское общество истории и философии науки, 2021. С. 43–49.

Попов 2021b — *Попов В. М.* Трехзначная паранормальная импликативно-негативная логика с одним выделенным значением // Восьмой Российский философский конгресс «Философия в полицентричном мире». Секции (I). Сборник научных статей. Российское философское общество; Институт философии РАН; МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: Логос, 2021. С. 217–218.