
ТРУДЫ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

А. Б. Гончарова

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЕДУКТИВНЫХ СРЕДСТВ РАЗЛИЧНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ (НА ПРИМЕРЕ ВРЕМЁННЫХ И АЛЕТИЧЕСКИХ ЛОГИК)

Аннотация: В данной работе на примере ряда нормальных модальных пропозициональных логик демонстрируется эффективность метода перевода и погружающих операций для установленных ранее соотношений между классами систем различного характера.

Ключевые слова: Нормальная модельная пропозициональная логика, алетическая логика, временная логика, процедура перевода, дедуктивная сила, отношения выводимости.

Abstract: This work demonstrates the effectiveness of translation method and immersing operations for earlier established correlations between classes of systems of different types (by the example of a number of normal modal propositional logic systems).

Keywords: Normal modal propositional logic, alethic logic, temporal logic, translation procedures, deductive accountability, inferential relations.

Развитие логики все более ставит вопрос о том, как возможно сравнение различных логических систем. Интересен этот вопрос, если речь идет о сравнении теорий, сформулированных в разных языках. Целью данной работы является сравнение дедуктивных сил ряда алетических и временных логик при определениях алетических модальностей через временные.

ПЕРЕВОД И ПОГРУЖАЮЩИЕ ОПЕРАЦИИ КАК СРЕДСТВА СРАВНЕНИЯ ТЕОРИЙ

Пусть T_1 и T_2 — теории, сформулированные соответственно в языках L_1 и L_2 с соответствующими логиками. Пусть φ — рекурсивная функция, сопоставляющая формуле языка L_1 форму языка L_2 .

Функцию будем называть переводом теории T_1 в T_2 , если и только если выполняется условие $A \in T_1 \Rightarrow \varphi(A) \in T_2$.

Если выполняется дополнительное условие $\varphi(A) \in T_2 \Rightarrow A \in T_1$, то рекурсивную функцию φ называют погружающей операцией T_1 в T_2 .

© А. Б. Гончарова, 2011

Не всякий перевод будет погружающей операцией, то, что перевод является погружающей операцией, необходимо доказать.

Теорема¹. Если φ есть перевод из S_1 в S_2 и существует такая рекурсивная функция ψ , что ψ есть перевод из S_2 в S_1 и формула $A \equiv \psi(\varphi(A))$ доказуема в S_1 , то φ есть операция, погружающая S_1 в S_2 .

Доказательство:

Пусть в S_2 доказуема формула $\varphi(A)$. Тогда в S_1 доказуема формула $\psi(\varphi(A))$. Но поскольку в S_1 доказуема формула $A \equiv \psi(\varphi(A))$, то в S_1 доказуема формула A . Следовательно, если $\vdash_{S_2} \varphi(A) \Rightarrow \vdash_{S_1} A$. Но так как $\vdash_{S_1} A \Rightarrow \vdash_{S_2} \varphi(A)$, то φ есть операция, погружающая S_1 в S_2 . Используем данный метод для сравнения временных и алетических логик.

В качестве перевода будут взяты определения алетических модальностей через временные, данные Диодором Кроносом и Аристотелем (в дальнейшем Df_1 и Df_2 соответственно), но сначала необходимо сформулировать исчисления сравниваемых систем.

ИСЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕННОЙ И АЛЕТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Для построения исчисления временной логики необходимо лишь обогатить язык КЛВ двумя модальными операторами H и G и дополнить стандартное определение формулы. Определения вывода и доказательства также стандартные.

При необходимости операторы P и F могут быть введены следующим образом:

$$PA \equiv_{Df} \neg H \neg A,$$

$$FA \equiv_{Df} \neg G \neg A.$$

Для удобства будет построено исчисление минимальной временной логики K_v , в семантике которого не накладывается никаких ограничений на отношение достижимости R .

Дедуктивные постулаты K_v — это аксиомы ИКЛВ, расширенные следующими аксиомами и нижеследующими правилами:

1. $H(A \supset B) \supset (HA \supset HB)$.
2. $G(A \supset B) \supset (GA \supset GB)$.
3. $A \supset GPA$.
4. $A \supset HFA$.

R1: modus ponens;

R2: $\frac{\vdash A}{\vdash HA}$ — правило Гёделя для оператора H .

¹ Формулировка теоремы и ее доказательство взяты из книги В. А. Смирнова: *Смирнов В. А. Логические методы анализа научного знания*. С. 48–49.

R3: $\vdash A \text{ — правило Гёделя для оператора } G.$
 $\vdash GA.$

Для построения алетической логики T, необходимо расширить язык КЛВ оператором необходимости и дополнить определение формулы. Определение вывода и доказательства стандартные. К дедуктивным постулатам ИКЛВ добавляется следующее:

1. $\Box A \supset A.$
 2. $\Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B).$
- R1: $\vdash A \text{ — правило Гёделя для оператора } \Box.$
 $\vdash \Box A.$

При необходимости операторы \Diamond может быть введен следующим образом: $\Diamond A \equiv_{Df} \neg \Box \neg A.$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЛЕТИЧЕСКИХ МОДАЛЬНОСТЕЙ ЧЕРЕЗ ВРЕМЕННЫЕ²

Диодор Кронос дал следующую трактовку необходимости и возможности посредством временных характеристик:

Df.1
 $\Diamond A \equiv_{Df} A \vee FA.$
 $\Box A \equiv_{Df} A \& GA.$

Следующая трактовка алетических модальностей Df.2 связана с именем Аристотеля.

$\Diamond A \equiv_{Df} PA \vee AVFA.$
 $\Box A \equiv_{Df} HA \& A \& GA.$

Погружение T в K_t(KF) при Df₁

Df₁: $\Diamond A \equiv_{Df} A \vee FA.$
 $\Box A \equiv_{Df} A \& GA.$

Принимая во внимание определение, зададим функции перевода следующим образом:

$\Gamma \rightarrow_{\varphi} K_t$	$K_t \rightarrow_{\psi} \Gamma$
$\varphi(p_i) \equiv p_i$	$\psi(p_i) \equiv p_i$
$\varphi(\neg A) \equiv \neg \varphi(A)$	$\psi(\neg A) \equiv \neg \psi(A)$
$\varphi(A * B) \equiv \varphi(A) * \varphi(B)$	$\psi(A * B) \equiv \psi(A) * \psi(B)$
$\varphi(\Box A) \equiv G \varphi(A) \& \varphi(A)$	$\psi(GA) \equiv \Box \psi(A)$

$\forall A \in L_{KF} (\vdash_{KF} A \Rightarrow \vdash_T \psi(A)).$

² Смирнов В. А. Определение модальных операторов через временные // Модальные и интенциональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984. С. 56.

I. Покажем, что φ есть перевод из алетической системы T во временную систему K_T , а точнее, в ее будущий фрагмент KF, доказав утверждение:

$$\forall A \in L_T (\vdash_T A \Rightarrow \vdash_{KF} \varphi(A)).$$

$$(1) \vdash_T A.$$

(2) Существует непустая, конечная последовательность формул:

$$C_1$$

$$C_2$$

$$C_i$$

1) аксиома;

2) получена по mp из предыдущих;

3) получена по правилу Геделя.

$$C_k \equiv A.$$

Рассмотрим случай 1.

C_i — аксиома.

Так как аксиомы 1-10(КЛВ) в системах T и KF совпадают, то достаточно показать лишь для оставшихся.

$$(1) \varphi(\Box A \supset A) = \varphi(\Box A) \supset \varphi(A) = (\varphi(A) \& G\varphi(A)) \supset \varphi(A).$$

Перевод этой аксиомы T в KF совпадает с A_3 обоих исчислений.

$$(2) \varphi(\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)) = (\varphi(A \supset B) \& G\varphi(A \supset B)) \supset (\varphi(\Box A) \supset \varphi(\Box B)) = ((\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (G\varphi(A) \supset G\varphi(B))) \supset ((\varphi(A) \& G\varphi(A)) \supset (\varphi(B) \& G\varphi(B))).$$

Доказательство:

$$(1) (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \text{ — доп.}$$

$$(2) (\varphi(A) \& G\varphi(A)) \text{ — доп.}$$

$$(3) (((\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (G\varphi(A) \supset G\varphi(B))) \supset (G\varphi(A) \supset G\varphi(B))) \text{ — } A_4.$$

$$(4) (((\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (G\varphi(A) \supset G\varphi(B))) \supset (\varphi(A) \supset \varphi(B))) \text{ — } A_3.$$

$$(5) G\varphi(A) \supset G\varphi(B) \text{ — mp (3),(1).}$$

$$(6) \varphi(A) \supset \varphi(B) \text{ — mp (4),(1).}$$

$$(7) (\varphi(A) \& G\varphi(A)) \supset \varphi(A) \text{ — } A_3.$$

$$(8) (\varphi(A) \& G\varphi(A)) \supset G\varphi(A) \text{ — } A_4.$$

$$(9) \varphi(A) \text{ — mp (7),(2).}$$

$$(10) G\varphi(A) \text{ — mp (8),(2).}$$

$$(11) \varphi(B) \text{ — mp (6),(9).}$$

$$(12) G\varphi(B) \text{ — mp (5),(10).}$$

$$(13) G\varphi(B) \supset (\varphi(B) \supset (\varphi(B) \& G\varphi(B))) \text{ — } A_5.$$

$$(14) \varphi(B) \supset (\varphi(B) \& G\varphi(B)) \text{ — mp (13),(12).}$$

$$(15) \varphi(B) \& G\varphi(B) \text{ — mp (13),(11).}$$

Устраняя допущения по теореме дедукции, получаем искомую формулу.

Рассмотрим случай 2.

C_i получена из предыдущих по mp.

$$(1) \vdash_{KF} \varphi(C_j).$$

ТРУДЫ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

- (2) $\vdash_{KF} \varphi (C_j \supset C_i)$.
- (3) $\vdash_{KF} \varphi(C_j) \supset \varphi (C_i)$.
- (4) $\vdash_{KF} \varphi(C_i)$.

Рассмотрим случай 3.

C_i получена по правилу Гёделя.

- (1) $\vdash_{KF} \varphi(C_i)$.
- (2) $\vdash_{KF} G\varphi(C_i)$.
- (3) $\vdash_{KF} \varphi(C_i) \ \& \ G\varphi(C_i)$.

II. Покажем, что ψ есть перевод будущего фрагмента K_i в алетическую систему T , доказав утверждение:

$$\forall A \in L_{KF} (\vdash_{KF} A \Rightarrow \vdash_T \psi(A)).$$

- (1) $\vdash_{KF} A$.
 - (2) Существует непустая, конечная последовательность формул
- C_1
 C_2
 C_i
- 1) аксиома;
 - 2) получена по тр из предыдущих;
 - 3) получена по правилу Гёделя.

$$C_k \equiv A.$$

Рассмотрим случай 1.

C_i — аксиома.

$$\psi(G(A \supset B) \supset (GA \supset GB)) = \psi(G(A \supset B)) \supset (\psi(GA \supset GB)) = \psi(G(A \supset B)) \supset (\psi(GA) \supset \psi(GB)) = \Box \psi(A \supset B) \supset (\Box \psi(A) \supset \Box \psi(B)).$$

Нетрудно увидеть, что результат перевода данной аксиомы является аксиомой исчисления T , поэтому его можно оставить без доказательства.

Рассмотрим случай 2.

C_i — получена по тр из предыдущих.

- (1) $\vdash_T \psi(C_j)$.
- (2) $\vdash_T \psi(C_j \supset C_i)$.
- (3) $\vdash_T \psi(C_j) \supset \psi(C_i)$.
- (4) $\vdash_T \psi(C_i)$.

Рассмотрим случай 3.

C_i получена по правилу Гёделя.

- (1) $\vdash_T \psi(C_i)$.
- (2) $\vdash_T \Box \psi(C_i)$.

Для того чтобы показать, что система алетических модальностей S_4 также является фрагментом временной системы K_r , только уже расширенной за счет

аксиомы транзитивности, достаточно добавить к доказанному выше в I, II соответственно:

$$I. \quad \varphi(\Box A \supset \Box \Box A) = \varphi(\Box A) \supset \varphi(\Box \Box A) = (G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset (G\varphi(\Box A) \& \varphi(\Box A)) = (G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset ((GG\varphi(A) \& G\varphi(A)) \& (G\varphi(A) \& \varphi(A))).$$

Доказательство:

- (1) $G\varphi(A) \& \varphi(A)$ — доп.
- (2) $(G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset GA$ — A_3 .
- (3) $G\varphi(A)$ — mp (1), (2).
- (4) $G\varphi(A) \supset GG\varphi(A)$ — A_{tr} .
- (5) $GG\varphi(A)$ — mp (3), (4).
- (6) $(GG\varphi(A) \supset (G\varphi(A) \supset (GG\varphi(A) \& G\varphi(A))))$ — A_5 .
- (7) $G\varphi(A) \supset (GG\varphi(A) \& G\varphi(A))$ — mp (5), (6).
- (8) $GG\varphi(A) \& G\varphi(A)$ — mp (7), (3).
- (9) $((GG\varphi(A) \& G\varphi(A)) \supset ((G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset ((GG\varphi(A) \& G\varphi(A)) \& (G\varphi(A) \& \varphi(A))))))$ — A_5 .
- (10) $(10)(G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset ((GG\varphi(A) \& G\varphi(A)) \& (G\varphi(A) \& \varphi(A)))$ — mp (8), (9).
- (11) $(11) (GG\varphi(A) \& G\varphi(A)) \& (G\varphi(A) \& \varphi(A))$ — mp (10), (1).
- (12) Устраняя допущение 1, по теореме дедукции получаем искомую формулу.

$$II. \quad \psi(GA \supset GGA) = \psi(GA) \supset \psi(GGA) = \Box \psi(A) \supset \Box \psi(GA) = \Box \psi(A) \supset \Box \Box \psi(A).$$

Легко заметить что в результате перевода ψ данной аксиомы K_1 получена аксиома S_4 , поэтому ее можно оставить без отдельного доказательства.

III. Теперь рассмотрим условие, которое позволяет назвать φ погружающей операцией $A \equiv \psi(\varphi(A))$:

$p_i \equiv \psi(\varphi(p_i))$	$\neg A \equiv \neg \psi(\varphi(A))$
$p_i \equiv \psi(p_i)$	$\neg A \equiv \psi(\neg \varphi(A))$
$p_i \equiv p_i$	$\neg A \equiv \psi(\varphi(\neg A))$
$(A * B) \equiv \psi(\varphi(A * B))$	(1) $\vdash_T A \equiv \psi(\varphi(A))$
$\psi(\varphi(A * B)) \equiv \psi(\varphi(A) * \varphi(B))$	(2) $\vdash_T \Box(A \equiv \psi(\varphi(A)))$ — по правилу Гёделя для оператора \Box
$\psi(\varphi(A) * \varphi(B)) \equiv \psi(\varphi(A)) * \psi(\varphi(B))$	(3) $\vdash_T \Box A \equiv \Box \psi(\varphi(A))$
$\Box A \equiv \psi(\varphi(\Box A))$	(4) $\vdash_T \Box \psi(\varphi(A)) \supset \psi(\varphi(A))$ — A_{11}
$\psi(\varphi(\Box A)) \equiv \psi(\varphi(A) \& G\varphi(A))$	(5) $\Box \psi(\varphi(A)) \equiv \Box \psi(\varphi(A)) \& \psi(\varphi(A))$
$\psi(\varphi(A) \& G\varphi(A)) \equiv \psi(\varphi(A)) \& \psi(G\varphi(A))$	(6) $\vdash_T \Box A \equiv \Box \psi(\varphi(A)) \& \psi(\varphi(A))$
$\psi(\varphi(A)) \& \psi(G\varphi(A)) \equiv \psi(\varphi(A)) \& \Box \psi(\varphi(A))$ — требуется доказать.	

Погружение B в Kt при Df_2

$$\begin{aligned} \diamond A &\equiv_{Df} PA \vee AVFA, \\ \square A &\equiv_{Df} HA \& A \& GA. \end{aligned}$$

Исходя из определения, зададим функции перевода:

$$\begin{array}{ll} B \rightarrow_{\varphi} K_t & K_t \rightarrow_{\psi} B \\ \varphi(p_i) \equiv p_i & \psi(p_i) \equiv p_i \\ \varphi(\neg A) \equiv \neg \varphi(A) & \psi(\neg A) \equiv \neg \psi(A) \\ \varphi(A * B) \equiv \varphi(A) * \varphi(B) & \psi(A * B) \equiv \psi(A) * \psi(B) \\ \varphi(\square A) \equiv G \varphi(A) \& \varphi(A) \& H \varphi(A) & \psi(H/GA) \equiv \square \psi(A) \\ & \psi(P/FA) \equiv \diamond \psi(A) \end{array}$$

$$\varphi(\diamond A) \equiv F \varphi(A) \vee \varphi(A) \vee P \varphi(A).$$

VII. Покажем, что φ есть перевод системы B в систему Kt .

$$\forall A \in L_B (\vdash_B A \Rightarrow \vdash_{Kt} \varphi(A)).$$

$$(1) \vdash_B A.$$

(2) Существует непустая, конечная последовательность формул

$$C_1$$

$$C_2$$

$$C_i$$

1) аксиома;

2) получена по mp из предыдущих;

3) получена по правилу Геделя.

$$C_k \equiv A.$$

Рассмотрим случай 1.

C_i — аксиома.

Так как аксиомы 1-10(КЛВ) в системах B и Kt совпадают, то достаточно показать лишь для оставшихся.

$$\varphi(\square A \supset A) = \varphi(\square A) \supset \varphi(A) = (G \varphi(A) \& \varphi(A) \& H \varphi(A)) \supset \varphi(A).$$

Результат перевода являет собой схему аксиом КИВ, поэтому в доказательстве не нуждается.

$$\begin{aligned} \varphi(A \supset \square \diamond A) &= \varphi(A) \supset \varphi(\square \diamond A) = \varphi(A) \supset (G \varphi(\diamond A) \& \varphi(\diamond A) \& H \varphi(\diamond A)) = \varphi(A) \supset (G(P \\ \varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F \varphi(A)) \& (P \varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F \varphi(A)) \& H(P \varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F \varphi(A))) = \\ \varphi(A) \supset (GP \varphi(A) \vee G \varphi(A) \vee GF \varphi(A)) \& (P \varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F \varphi(A)) \& (HP \varphi(A) \\ \vee H \varphi(A) \vee HF \varphi(A))). \end{aligned}$$

Доказательство:

(1) $\varphi(A)$ — доп.

(2) $\varphi(A) \supset GP \varphi(A)$ — A_{13} .

(3) $GP \varphi(A)$ — mp (1), (2).

(4) $GP \varphi(A) \supset (GP \varphi(A) \vee G \varphi(A))$ — A_6 .

(5) $GP \varphi(A) \vee G \varphi(A)$ — mp (3), (4).

- (6) $(GP\varphi(A) \vee G\varphi(A)) \supset (GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \text{ — } A_6.$
- (7) $(GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \text{ — mp (5), (6).}$
- (8) $\varphi(A) \supset (P\varphi(A) \vee \varphi(A)) \text{ — } A_6.$
- (9) $P\varphi(A) \vee \varphi(A) \text{ — mp (1), (8).}$
- (10) $(P\varphi(A) \vee \varphi(A)) \supset (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \text{ — } A_6.$
- (11) $P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A) \text{ — mp (9), (10).}$
- (12) $\varphi(A) \supset HF\varphi(A) \text{ — } A_{14}.$
- (13) $HF\varphi(A) \text{ — mp (1), (12).}$
- (14) $HF\varphi(A) \supset (H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)) \text{ — } A_7.$
- (15) $H\varphi(A) \vee HF\varphi(A) \text{ — mp (13), (14).}$
- (16) $(H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)) \supset (HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)).$
- (17) $(HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)) \text{ — mp (15), (16).}$
- (18) $((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \supset ((P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \supset ((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)))))$.
- (19) $(P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \supset ((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A))) \text{ — mp (7), (18).}$
- (20) $(GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \text{ — mp (11), (19).}$
- (21) $((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \supset ((HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)) \supset ((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \& (HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)))) \text{ — } A_5.$
- (22) $(HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)) \supset (((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \& (HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A))) \text{ — mp (21), (20).}$
- (23) $((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \& (HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)) \text{ — mp (22), (17).}$

Устраняя допущение 1, по теореме дедукции получаем искомую формулу.
 $\varphi(\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)) = \varphi(\Box(A \supset B)) \supset \varphi(\Box A \supset \Box B) = (G\varphi(A \supset B) \& \varphi(A \supset B) \& H(A \supset B)) \supset (\varphi(\Box A) \supset \varphi(\Box B)) = (G\varphi(A \supset B) \& \varphi(A \supset B) \& H\varphi(A \supset B)) \supset ((G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset (G\varphi(B) \& \varphi(B) \& H\varphi(B))) = ((G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \& (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (H\varphi(A) \supset H\varphi(B))) \supset ((G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset (G\varphi(B) \& \varphi(B) \& H\varphi(B))).$

Доказательство:

- (1) $(G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \& (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (H\varphi(A) \supset H\varphi(B)) \text{ — доп.}$
- (2) $(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \text{ — доп.}$
- (3) $((G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \& (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (H\varphi(A) \supset H\varphi(B))) \supset (G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \text{ — } A_3.$
- (4) $G\varphi(A) \supset G\varphi(B) \text{ — mp (1), (3).}$
- (5) $(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset G\varphi(A) \text{ } A_3.$
- (6) $G\varphi(A) \text{ — mp (2), (5).}$
- (7) $G\varphi(B) \text{ — mp (4), (6).}$
- (8) $(G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \& (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (H\varphi(A) \supset H\varphi(B)) \supset (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \text{ — } A_3.$

ТРУДЫ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

- (9) $\varphi(A) \supset \varphi(B) \text{ — mp (1), (8)}$.
- (10) $(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset \varphi(A) \text{ — } A_3$.
- (11) $\varphi(A) \text{ — mp (2), (10)}$.
- (12) $\varphi(B) \text{ — mp (9), (11)}$.
- (13) $(G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \& (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (H\varphi(A) \supset H\varphi(B)) \supset (H\varphi(A) \supset H\varphi(B)) \text{ — } A_3$.
- (14) $H\varphi(A) \supset H\varphi(B) \text{ — mp (13), (1)}$.
- (15) $(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset H\varphi(A) \text{ — } A_3$.
- (16) $H\varphi(A) \text{ — mp (2), (15)}$.
- (17) $H\varphi(B) \text{ — mp (9), (11)}$.
- (18) $G\varphi(B) \supset (\varphi(B) \supset (G\varphi(B) \& \varphi(B))) \text{ — } A_5$.
- (19) $\varphi(B) \supset (G\varphi(B) \& \varphi(B)) \text{ — mp(18),(7)}$.
- (20) $G\varphi(B) \& \varphi(B) \text{ — mp (19), (12)}$.
- (21) $((G\varphi(B) \& \varphi(B)) \supset (H\varphi(B) \supset (G\varphi(B) \& \varphi(B) \& H\varphi(B)))) \text{ — } A_5$.
- (22) $(H\varphi(B) \supset (G\varphi(B) \& \varphi(B) \& H\varphi(B))) \text{ — mp (21), (20)}$.
- (23) $(G\varphi(B) \& \varphi(B) \& H\varphi(B)) \text{ — mp (22), (17)}$.

Устраняя допущения (1), (2), по теореме дедукции получаем искомую формулу.

Рассмотрим случай 2. $\vdash \rightarrow$

C_i получена из предыдущих по mp.

- (1) $\vdash_{Kt} \varphi(C_i)$.
- (2) $\vdash_{Kt} \varphi(C_j \supset C_i)$.
- (3) $\vdash_{Kt} \varphi(C_j) \supset \varphi(C_i)$.
- (4) $\vdash_{Kt} \varphi(C_i)$.

Рассмотрим случай 3.

- (1) $\vdash_{Kt} \varphi(C_i)$.
- (2) $\vdash_{Kt} G\varphi(C_i)$.
- (3) $\vdash_{Kt} H\varphi(C_i)$.
- (4) $\vdash_{Kt} G\varphi(C_i) \& \varphi(C_i) \& H\varphi(C_i)$.

VIII. Покажем, что ψ есть перевод системы Kt в систему B.

$\forall A \in L_{Kt} (\vdash_{Kt} A \Rightarrow \vdash_B \psi(A))$

- (1) $\vdash_{Kt} A$.
- (2) Существует непустая, конечная последовательность формул:

- C_1
- C_2
- C_i 1) аксиома;
- 2) получена по mp из предыдущих;
- 3) получена по правилу Гёделя.
- $C_k \equiv A$.

Рассмотрим случай 1.

C_i — аксиома.

$$\psi(G(A \supset B) \supset (GA \supset GB)) = \psi(G(A \supset B)) \supset (\psi(GA \supset GB)) = \psi(G(A \supset B)) \supset (\psi(GA) \supset \psi(GB)) = \square \psi(A \supset B) \supset (\square \psi(A) \supset \square \psi(B)).$$

$$\psi(H(A \supset B) \supset (HA \supset HB)) = \psi(H(A \supset B)) \supset (\psi(HA \supset HB)) = \psi(H(A \supset B)) \supset (\psi(HA) \supset \psi(HB)) = \square \psi(A \supset B) \supset (\square \psi(A) \supset \square \psi(B)).$$

$$\psi(A \supset GPA) = \psi(A) \supset \psi(GPA) = \psi(A) \supset \square \psi(PA) = \psi(A) \supset \square \diamond \psi(A).$$

$$\psi(A \supset HFA) = \psi(A) \supset \psi(HFA) = \psi(A) \supset \square \psi(FA) = \psi(A) \supset \square \diamond \psi(A).$$

Результаты перевода этих схем аксиом K_i являются схемами аксиом B , и их подробное доказательство приведено не будет.

Рассмотрим случай 2.

C_i — получена по тр из предыдущих.

$$(1) \vdash_B \varphi(C_j).$$

$$(2) \vdash_B \varphi(C_j \supset C_i).$$

$$(3) \vdash_B \varphi(C_j) \supset \varphi(C_i).$$

$$(4) \vdash_B \varphi(C_i).$$

Рассмотрим случай 3.

C_i получена по правилу Гёделя.

$$(1) \vdash_B \psi(C_i).$$

$$(2) \vdash_B \square \psi(C_i).$$

Для того чтобы показать, что система алетических модальностей S_5 также является фрагментом временной системы K_t , только расширенной за счет аксиомы транзитивности и аксиом линейности в прошлое и будущее, достаточно добавить к доказанному выше в I, II соответственно:

$$I. \varphi(\square A \supset \square \square A) = \varphi(\square A) \supset \varphi(\square \square A) = (G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset (G\varphi(\square A) \& \varphi(\square A) \& H\varphi(\square A)) = (G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset (G(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \& (G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \& H(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A))).$$

$$II. \psi(GA \supset GGA) = \psi(GA) \supset \psi(GGA) = \square \psi(A) \supset \square \psi(GA) = \square \psi(A) \supset \square \square \psi(A).$$

Результат перевода является схемой аксиом S_5 :

$$\psi((PA \& PB) \supset (P(A \& PB) \vee P(B \& PA) \vee P(A \& B))) = \psi(PA \& PB) \supset (\psi(P(A \& PB)) \vee \psi(P(B \& PA)) \vee \psi(P(A \& B))) = (\psi(PA) \& \psi(PB)) \supset (\psi(P(A \& PB)) \vee \psi(P(B \& PA)) \vee \psi(P(A \& B))) = (\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B)) \supset ((\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B)) \vee (\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B)) \vee (\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B))) = (\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B)) \supset ((\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B)) \vee (\diamond \psi(B) \& \diamond \psi(A)) \vee (\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B))).$$

$$\psi((FA \& FB) \supset (F(A \& FB) \vee F(B \& FA) \vee F(A \& B))) = \psi(FA \& FB) \supset (\psi(F(A \& FB)) \vee \psi(F(B \& FA)) \vee \psi(F(A \& B))) = (\psi(FA) \& \psi(FB)) \supset (\psi(F(A \& FB)) \vee \psi(F(B \& FA)) \vee \psi(F(A \& B))) = (\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B)) \supset ((\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B)) \vee (\diamond \psi(B) \& \diamond \psi(A)) \vee (\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B))) = (\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B)) \supset ((\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B)) \vee (\diamond \psi(B) \& \diamond \psi(A)) \vee (\diamond \psi(A) \& \diamond \psi(B))).$$

Результат перевода одинаковый, поэтому имеет смысл привести и общее доказательство:

- (1) $(\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B))$.
- (2) $(\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \supset ((\diamond\psi(B) \& \diamond\psi(A)) \vee (\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B))) \text{ — } A_7$.
- (3) $(\diamond\psi(B) \& \diamond\psi(A)) \vee (\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \text{ — } mp(1), (2)$.
- (4) $(\diamond\psi(B) \& \diamond\psi(A)) \vee (\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \supset ((\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \vee (\diamond\psi(B) \& \diamond\psi(A))) \vee (\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \text{ — } A_7$.
- (5) $(\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \vee (\diamond\psi(B) \& \diamond\psi(A)) \vee (\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \text{ — } A_7$.
- (6) $(\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \vee (\diamond\psi(B) \& \diamond\psi(A)) \vee (\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \text{ — } mp(3), (4)$.
- (7) $(\diamond\psi(A) \& \diamond\psi(B)) \text{ — } mp(3), (4)$.

III. Условие, необходимое для того, чтобы ψ считать погружающей операцией.

$$\begin{array}{ll} A \equiv \psi(\varphi(A)), & \neg A \equiv \neg \psi(\varphi(A)), \\ p_i \equiv \psi(\varphi(p_i)), & \neg A \equiv \psi(\neg \varphi(A)), \\ p_i \equiv \psi(p_i), & \neg A \equiv \psi(\varphi(\neg A)), \\ p_i \equiv p_i. & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (A * B) \equiv \psi(\varphi(A * B)), & (1) \vdash_B A \equiv \psi(\varphi(A)). \\ \psi(\varphi(A * B)) \equiv \psi(\varphi(A) * \varphi(B)), & (2) \vdash_B \Box(A \equiv \psi(\varphi(A))) \text{ — по правилу} \\ \psi(\varphi(A) * \varphi(B)) \equiv \psi(\varphi(A)) * \psi(\varphi(B)), & \text{Гёделя для оператора } \Box. \\ \Box A \equiv \psi(\varphi(\Box A)), & (3) \vdash_B \Box A \equiv \Box \psi(\varphi(A)). \\ \psi(\varphi(\Box A)) \equiv \psi(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)), & (4) \vdash_B \Box \psi(\varphi(A)) \supset \psi(\varphi(A)) \text{ — } A_{11}. \\ \psi(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& \psi(H\varphi(A))), & (5) \Box \psi(\varphi(A)) \equiv \Box \psi(\varphi(A)) \& \psi \\ \Box \psi(\varphi(A)) \& \psi(\varphi(A)) \& \Box \psi(\varphi(A)) \text{ —} & (\varphi(A) \& \Box \psi(\varphi(A))). \\ \text{требуется доказать.} & (6) \vdash_B \Box A \equiv \Box \psi(\varphi(A)) \& \psi(\varphi(A)). \end{array}$$

Сравнение алетических и временных логик посредством выражения алетических модальностей через временные дает возможность исследовать соотношение между имплицитно конституированными в этих логиках концепций времени и тем философским пониманием необходимости и возможности, которые подразумеваются при построении формальных систем алетических логик.