Аксиоматическая теория доказательства для модальной логики с поссибилистскими кванторами и равенством

Е. В. Борисов, И. И. Мухаметшина
ИФПР СО РАН
borisov.evgeny@gmail.com · mukhametshina.indira@gmail.com

Аннотация. В статье предложена аксиоматизация разработанной авторами логики $MLPQ$ (modal logic with possibilist quantifiers). $MLPQ$ представляет собой модальную логику первого порядка с равенством. Ее синтаксические и семантические особенности таковы: 1) формальный язык $MLPQ$ содержит индивидные константы, актуалистский и поссибилистский кванторы, 2) модели $MLPQ$ имеют переменный домен; 3) в моделях $MLPQ$ индивидные константы имеют нежесткую интерпретацию; при этом денотат константы в мире w может лежать вне домена w. В [4] были описаны язык и семантика $MLPQ$ (без использования этой аббревиатуры) и показаны ее выразительные возможности в сравнении с модальной логикой первого порядка Фиттинга и Мендельсона [1]. Ниже описаны язык и семантика $MLPQ$ и представлена аксиоматическая теория доказательства, для которой может быть показана сильная полнота относительно данной семантики. DOI: 10.52119/LPHS.2024.26.44.001.
Ключевые слова: модальная логика первого порядка с равенством, поссибилистская квантификация, аксиоматическая теория доказательства.

Язык $\mathcal{L}$. Множество примитивных символов языка $\mathcal{L}$ содержит счетно-бесконечное множество индивидных переменных $x_1, x_2, \dots$, счетно-бесконечное множество индивидных констант $c_1, c_2, \dots$, счетно-бесконечное множество n-местных предикатов $P_1^n, P_2^n, \dots$ для любого натурального $n > 0$, логические связки $\neg, \rightarrow$, оператор необходимости $\Box$, универсальный актуалистский квантор $\forall$, универсальный поссибилистский квантор Π, скобки и запятую.
Определение (терм). Термы $\mathcal{L}$ (термы) — это переменные и константы.
Определение (атомарная формула). Если P — n-местный предикатный символ и $t_1, \dots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \dots, t_n)$ — атомарная формула языка $\mathcal{L}$ (атомарная формула).
Определение (формула). Множество формул языка $\mathcal{L}$ (формул) определяется следующим образом:

$$\phi ::= P(t_1, \dots, t_n) \mid t_1 = t_2 \mid \neg\, \phi \mid \phi_1 \rightarrow \phi_1 \mid \Box\, \phi \mid \forall x \phi \mid \Pi x \phi,$$

где P — n-местный предикатный символ, x — переменная, $t_1, \dots, t_n$ — термы, ϕ — формула. $\&, \vee, \Diamond, \exists$ определяются стандартным образом. Экзистенциальный поссибилистский квантор Σ определяется через Π следующим образом: для любой формулы ϕ и переменной x,

$$\Sigma x \phi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\, \Pi x \neg\, \phi.$$

Семантика $MLPQ$. *Определение* (модель). Модель $MLPQ$ — это упорядоченная пятерка $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$, в которой:

- $\mathcal{G} \neq \varnothing$ (множество возможных миров);
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G}^2$ (отношение достижимости);
- $\mathcal{D} \neq \varnothing$ (домен модели);
- d — функция такая, что для любого $w \in \mathcal{G}$, $d(w) \subseteq \mathcal{D}$ и $d(w) \neq \varnothing$ (доменная функция);
- $\mathcal{I}$ — функция такая, что:
  - для любого $n \geq 1$, любого n-местного предиката P и любого $w \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(P, w) \subseteq \mathcal{D}^n$;

– для любой индивидной константы c и любого $w \in \mathcal{G}, \mathcal{I}(c, w) \in \mathcal{D}$;
– для каждого $w \in \mathcal{G}, \mathcal{I}(=, w) = \{(e, e) \mid e \in \mathcal{D}\}$.

Определение (оценка переменных в модели). Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$ — модель. Оценка переменных в модели $\mathcal{M}$ — это функция v, назначающая каждой переменной x некоторый элемент $v(x)$ домена модели $\mathcal{D}$. Пусть $e \in \mathcal{D}$. Тогда v_x^e — это оценка переменных в $\mathcal{M}$, такая что v_x^e и v согласны относительно всех переменных, кроме, возможно, x, и $v_x^e(x) = e$. v_x^e называется x-вариантом v.

Определение (денотация). Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$ — модель, а v — оценка переменных в $\mathcal{M}$. Тогда $v\mathcal{I}$ — это функция, назначающая каждому терму t и возможному миру w денотат следующим образом:

1. если t — переменная, то $v\mathcal{I}(t, w) = v(t)$;
2. если t — константный символ, то $v\mathcal{I}(t, w) = \mathcal{I}(t, w)$;

Определение (истинность формулы $\mathcal{L}$ в некотором мире модели). Отношение истинности ($\vDash$) между моделями, мирами, оценками переменных и формулами языка $\mathcal{L}$ определяется следующим образом. Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$ — модель, w — возможный мир, v — оценка переменных в $\mathcal{M}$, P — n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, ϕ и ψ — формулы. Тогда:

1. $\mathcal{M}, w, v \vDash P(t_1, \ldots, t_n) \iff \langle v\mathcal{I}(t_1, w), \ldots, v\mathcal{I}(t_n, w) \rangle \in \mathcal{I}(P, w)$;
2. $\mathcal{M}, w, v \vDash \neg \phi \iff \mathcal{M}, w, v \nvDash \phi$;
3. $\mathcal{M}, w, v \vDash \phi \to \psi \iff (\mathcal{M}, w, v \vDash \phi \Rightarrow \mathcal{M}, w, v \vDash \psi)$;
4. $\mathcal{M}, w, v \vDash \Box \phi \iff (\forall u : w\mathcal{R}u)\, \mathcal{M}, u, v \vDash \phi$;
5. $\mathcal{M}, w, v \vDash \forall x \phi \iff (\forall e \in d(w))\, \mathcal{M}, w, v_x^e \vDash \phi$;
6. $\mathcal{M}, w, v \vDash \Pi x \phi \iff (\forall e \in \mathcal{D})\, \mathcal{M}, w, v_x^e \vDash \phi$.

Определение (выполнимость множества при оценке переменных в мире). Оценка переменных v в модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$ выполняет множество формул Γ в $w \in \mathcal{G}$, если для любой формулы $\phi \in \Gamma$, $\mathcal{M}, w, v \vDash \phi$.

Определение (выполнимость множества). Множество формул Γ называется $MLPQ$-выполнимым, если существуют модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$, оценка переменных v в $\mathcal{M}$ и $w \in \mathcal{G}$, такие, что v выполняет Γ в w.

Определение ($MLPQ$-общезначимость). Формула ϕ называется $MLPQ$-общезначимой (далее «общезначимой»), если $\{\neg\phi\}$ невыполнимо.

Аксиоматическая теория доказательства $MLPQ$. *Определение* (модальный профиль формулы относительно переменной) [2]. Пусть ϕ — формула, x — переменная; тогда $\Theta(\phi, x)$ (модальный профиль ϕ относительно x) — это кортеж натуральных чисел $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$, где для любого i, $1 \leq i \leq k$, n_i — число модальных операторов, в области которых находится свободное вхождение x. Элементы кортежа попарно различны и расположены в порядке возрастания; если x не имеет свободных вхождений в ϕ, то $\Theta(\phi, x)$ — пустой кортеж.

Пример. Пусть $\phi = \Box\Big(\Box\big(\Diamond P(x,y) \to \Box\Box Q(x) \,\&\, \Diamond Q(y)\big)\Big) \vee Q(x)$. Тогда $\Theta(\phi, x) = \langle 0, 3, 4 \rangle$, $\Theta(\phi, y) = \langle 3 \rangle$, $\Theta(\phi, z) = \langle \rangle$.

Понятие модального профиля используется ниже в аксиомных схемах 2.1 и 2.2. Эти схемы основаны на принципе подстановки (C.N=), предложенном Хинтиккой для некоторых модальных логик первого порядка [2, p. 24].

Конвенция. Для любой формулы ϕ, любой переменной x и любого терма t, ϕ^t_x — результат замены всех свободных вхождений переменной x вхождениями терма t (с переименованием связанных переменных, если t — переменная и некоторые свободные вхождения x в ϕ лежат в области действия $\forall t$).

Ниже используются следующие метаязыковые переменные: ϕ, χ, ψ — для формул, t, s — для термов, c — для констант, x, y — для переменных. Метаязыковые переменные для термов и формул могут использоваться с нижними индексами.

Аксиомами $MLPQ$ являются:

1. Подстановочные экземпляры теорем пропозициональной логики K.
2. Подстановочные экземпляры следующих схем:
   2.1. $\forall x\phi \,\&\, \exists x(\Box^{n_1}x = c \,\&\, \ldots \,\&\, \Box^{n_k}x = c) \to \phi^c_x$, где $\langle n_1, \ldots, n_k\rangle = \Theta(\phi, x)$ (если $\Theta(\phi, x) = \langle\rangle$, то подформула $\exists x(\Box^{n_1}x = c \,\&\, \ldots \,\&\, \Box^{n_k}x = c)$ отсутствует);
   2.2. $\Pi x\phi \,\&\, \Sigma x(\Box^{n_1}x = c \,\&\, \ldots \,\&\, \Box^{n_k}x = c) \to \phi^c_x$, где $\langle n_1, \ldots, n_k\rangle = \Theta(\phi, x)$ (если $\Theta(\phi, x) = \langle\rangle$, то подформула $\Sigma x(\Box^{n_1}x = c \,\&\, \ldots \,\&\, \Box^{n_k}x = c)$ отсутствует);
   2.3. $\forall y(\forall x\phi \to \phi^y_x)$;
   2.4. $\Pi x\phi \to \phi^y_x$;
   2.5. $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$;
   2.6. $\forall x\forall y\phi \to \forall y\forall x\phi$;
   2.7. $\phi \to \forall x\phi$, если $x \notin FV(\phi)$;
   2.8. $\Pi x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \Pi x\psi)$, если x не имеет свободных вхождений в ϕ;
   2.9. $\Pi x\Box\phi \to \Box\Pi x\phi$;
   2.10. $\forall x\Pi y\phi \leftrightarrow \Pi y\forall x\phi$, если $x \neq y$;
   2.11. $x = y \to \Box x = y$;
   2.12. $\Diamond x = y \to x = y$;
   2.13. $t = t$;
   2.14. $s = t \to (\phi^s_x \to \phi^t_x)$, если свободные вхождения x в ϕ не лежат в области действия модальных операторов.

Правила вывода:

MP: $\dfrac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}$

Nec: $\dfrac{\phi}{\Box\phi}$

Gen$^\forall$: $\dfrac{\phi}{\forall x\phi}$

Gen$^\Pi$: $\dfrac{\phi}{\Pi x\phi}$

Правила MP, Nec и Gen$^\forall$ стандартны для модальной логики первого порядка (см., например, [1, Ch. 6]). Правило Gen$^\Pi$ необходимо для доказательства поссибилистских обобщений.

Определение (вывод). Последовательность $\phi_1, \ldots, \phi_k$ называется выводом формулы ϕ_k в $MLPQ$ из множества формул Γ, если для любого i, $1 \leq i \leq k$, ϕ_i или является аксиомой $MLPQ$, или принадлежит Γ, или следует из некоторых предыдущих формул по MP, или яв-

ляется результатом применения одного из правил Nec, $\mathrm{Gen}^{\forall}$, Gen^{Π} к некоторой теореме из $\{\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}\}$.
Определение ($MLPQ$-непротиворечивость). Множество формул называется $MLPQ$-непротиворечивым, если существует не выводимая из него формула.

Полнота. *Теорема* (Сильная полнота $MLPQ$). Любое множество формул $MLPQ$-непротиворечиво, если и только если оно $MLPQ$-выполнимо.
Доказательство этой теоремы довольно громоздко, поэтому мы его опускаем; отметим только, что мы использовали ряд технических идей Томасона [3].

Литература

1. Fitting M., Mendelsohn R. L. *First-Order Modal Logic.* New York: Springer Science + Business Media, B.Y., 1998.
2. Hintikka J. Existential Presuppositions and Uniqueness Presuppositions. *Philosophical Problems in Logic: Some Recent Developments* / ed. by K. Lambert. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1970, p. 20–55.
3. Thomason R. H. Some Completeness Results for Modal Predicate Calculi. *Philosophical Problems in Logic: Some Recent Developments* / ed. by K. Lambert. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1970, p. 56–76.
4. Мухаметшина И. И. Выразительные возможности λ-оператора и поссибилистских кванторов в модальных логиках первого порядка. *Analytica*, т. 8, 2023, с. 90–103.