О полноте инфинитарного гиперсеквенциального исчисления для первопорядковой бесконечнозначной логики Лукасевича

А. С. Герасимов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
`alexander.s.gerasimov@ya.ru`

Аннотация. В 2010 году Бaaц (Baaz) и Меткалф (Metcalfe) опубликовали инфинитарное аналитическое гиперсеквенциальное исчисление для первопорядковой бесконечнозначной логики Лукасевича, но привели неверное доказательство полноты этого исчисления. В данном докладе представляется первое верное доказательство полноты этого исчисления. DOI: `10.52119/LPHS.2024.53.50.002`.

Ключевые слова: многозначная логика, нечёткая логика, первопорядковая бесконечнозначная логика Лукасевича, инфинитарное исчисление, полнота.

Введение. Логики Лукасевича являются исторически первыми многозначными логиками. Первопорядковая бесконечнозначная логика Лукасевича Ł∀ имеет отрезок $[0,1]$ вещественных чисел в качестве множества истинностных значений и, таким образом, относится к нечётким логикам, которые служат для формализации приближённых рассуждений [8, 4].

Далее мы будем говорить об исчислениях для логики Ł∀, понимая под таким исчислением любое корректное для Ł∀ исчисление, иными словами, такое исчисление, что все выводимые в нём Ł∀-формулы общезначимы (т. е. принимают лишь истинностное значение 1). Множество всех общезначимых Ł∀-формул неперечислимо, если используемая сигнатура достаточно богата [8, Sec. 6.3]. Поэтому для логики Ł∀ неполно любое исчисление с перечислимым множеством теорем и, в частности, любое (так называемое «обычное») исчисление с рекурсивным множеством аксиом и конечным множеством рекурсивных правил вывода. Тем не менеее, в [3], [9] и [8, Sec. 5.4] «обычные» гильбертовские (и потому неаналитические) исчисления для логики Ł∀ были расширены правилом, имеющим бесконечное число посылок, и было доказано, что полученные инфинитарные исчисления полны.

В [2] для логики Ł∀, формулы которой строятся с помощью нулевой истинностной константы $\bar{0}$, бинарной связки «импликация Лукасевича» $\to$ и кванторов $\forall$ и $\exists$, предложены «обычное» аналитическое гиперсеквенциальное исчисление GŁ∀ и инфинитарное исчисление GŁ∀$+(\infty)$, расширяющее GŁ∀ посредством правила (∞) с бесконечным числом секвенций вида $\left(\bar{0} \Rightarrow [A]^k\right)$ в качестве посылок:

$$\frac{\bar{0} \Rightarrow [A]^k \;\text{ для всех положительных целых чисел } k}{\Rightarrow A}\,(\infty),$$

где A — Ł∀-формула, и $[A]^k$ — мультимножество, состоящее из k копий A. Также в [2, Sec. 7] сформулирована следующая теорема о полноте исчисления GŁ∀$+(\infty)$.

Теорема 1. Пусть F — Ł∀-предложение. Тогда F общезначимо, если и только если F выводимо в GŁ∀$+(\infty)$. □

Однако мы обнаружили, что приведённое в [2, Sec. 7] доказательство этой теоремы существенно неверно; и автор статьи [2] Дж. Меткалф согласился с нами. В данном докладе мы более детально, чем в тезисах [7], представляем первое верное доказательство теоремы 1.

Схема доказательства теоремы 1. В [5, Sec. 7] мы установили теорему 1 лишь для пренексных, или предварённых, Ł∀-предложений, а именно установили следующую теорему.

Теорема 2 [5, Sec. 7]. Пусть F — пренексное Ł∀-предложение. Тогда:
(a) F общезначимо, если и только если для всех положительных целых чисел k секвенция $\left(\bar{0} \Rightarrow [F]^k\right)$ выводима в GŁ∀;
(b) F общезначимо, если и только если F выводимо в GŁ∀$+(\infty)$.
(Утверждение (b) есть следствие утверждения (a).) □

Теперь мы доказываем теорему 2 для произвольного Ł∀-предложения F и тем самым доказываем теорему 1; здесь существенным затруднением является то, что известное правило сечения не допустимо в GŁ∀, как показано в [2].

Мы определяем для логики Ł∀ новое исчисление GŁ∀$_\mathsf{c}$, которое лучше, чем GŁ∀, подходит для перестановки смежных применений правил вывода. Исчисление GŁ∀$_\mathsf{c}$ получается из введённого в [1] исчисления G^{1}Ł∀ удалением одного вхождения главной секвенции из каждой посылки каждого правила вывода и добавлением правила внешнего сокращения (ec) из GŁ∀. Мы устанавливаем, что исчисление GŁ∀$_\mathsf{c}$ равнообъёмно исчислению G^{1}Ł∀, которое, как показано в [6, Corollary 5.12], является консервативным расширением исчисления GŁ∀. Таким образом, справедлива

Теорема 3. Исчисление GŁ∀$_\mathsf{c}$ — консервативное расширение исчисления GŁ∀. □

Чтобы доказать полноту исчислений GŁ∀$+(\infty)$ и GŁ∀$_\mathsf{c}+(\infty)$, нам остаётся показать, что для общезначимости произвольного Ł∀-предложения F необходимо и достаточно выводимости секвенции $\left(\bar{0} \Rightarrow [F]^k\right)$ в GŁ∀$_\mathsf{c}$ для всех положительных целых чисел k. Здесь достаточность легко устанавливается с помощью корректности исчисления GŁ∀$_\mathsf{c}$. А (нетривиальная) необходимость сводится к случаю, когда F пренексное, следующим образом.

Имея общезначимое Ł∀-предложение F и положительное целое число k, мы преобразуем F (лишь посредством переименования связанных переменных и применения законов пронесения кванторов) в пренексную форму F_p, которая оказывается общезначимым Ł∀-предложением. В силу теорем 2 и 3 секвенция $\left(\bar{0} \Rightarrow [F_p]^k\right)$ выводима в GŁ∀$_\mathsf{c}$. Отсюда ввиду приведённой ниже леммы 4 вытекает выводимость секвенции $\left(\bar{0} \Rightarrow [F]^k\right)$ в GŁ∀$_\mathsf{c}$, что и требовалось.

Лемма 4 (о депренексификации). Пусть:
(a) $\mathcal{H}$ — гиперсеквенция, выводимая в GŁ∀$_\mathsf{c}$;
(b) $\mathcal{Q}$ — вхождение Ł∀-формулы $\exists x(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ в $\mathcal{H}$;
(c) x не входит свободно $\mathcal{B}$;
(d) гиперсеквенция $\mathcal{H}'$ получается из $\mathcal{H}$ заменой $\mathcal{Q}$ на $(\forall x\mathcal{A} \to \mathcal{B})$.
Тогда $\mathcal{H}'$ выводима в GŁ∀$_\mathsf{c}$.

Также справедливы 3 аналогичных утверждения для 3 других законов пронесения кванторов (выше в данной лемме приведено утверждение для закона, выражающего семантическую эквивалентность $\exists x(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ и $(\forall x\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ при условии (c)). □

Для доказательства леммы 4 мы исследуем перестановки нескольких смежных применений правил исчисления GŁ∀$_\mathsf{c}$ и, используя такие перестановки и некоторые «хирургические» операции над GŁ∀$_\mathsf{c}$-выводами, преобразуем любой данный GŁ∀$_\mathsf{c}$-вывод для $\mathcal{H}$ в GŁ∀$_\mathsf{c}$-вывод для $\mathcal{H}'$ (в действительности эта часть нашего доказательства довольно длинна).

Заключение. По изложенной выше схеме мы доказали, что инфинитарные аналитические гиперсеквенциальные исчисления GŁ∀$_\mathsf{c}+(\infty)$ и GŁ∀$+(\infty)$ для логики Ł∀ полны. Полезным следствием нашего доказательства (а именно леммы 4 о депренексификации) является то, что для любой Ł∀-формулы A и любой её пренексной формы A_p, определяемой в чисто синтаксических терминах, из выводимости A_p в GŁ$\forall_c$ или GŁ∀ вытекает выводимость A в GŁ$\forall_c$ и GŁ∀.

Литература

1. Герасимов А. С. Бесконечнозначная логика Лукасевича первого порядка: гиперсеквенциальные исчисления без структурных правил и поиск вывода предварённых предложений. *Математические труды*, 2017, т. 20, № 2, с. 3–34.
2. Baaz M., Metcalfe G. Herbrand's theorem, skolemization and proof systems for first-order Łukasiewicz logic. *Journal of Logic and Computation* 20.1, 2010, p. 35–54.
3. Belluce L. P., Chang C. C. A weak completeness theorem for infinite valued first-order logic. *Journal of Symbolic Logic* 28.1, 1963, p. 43–50.
4. Cintula P., Hájek P., Noguera C., eds. *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic.* Vol. 1 and 2. London: College Publications, 2011.
5. Gerasimov A. S. Repetition-free and infinitary analytic calculi for first-order rational Pavelka logic. *Siberian Electronic Mathematical Reports* 17, 2020, p. 1869–1899.
6. Gerasimov A. S. Comparing calculi for first-order infinite-valued Łukasiewicz logic and first-order rational Pavelka logic. *Logic and Logical Philosophy* 32.2, 2022, p. 269–318.
7. Gerasimov A. S. The completeness of an infinitary analytic calculus for first-order infinite-valued Łukasiewicz logic. *International Conference "Mal'tsev Meeting 2023": Collection of Abstracts.* Novosibirsk, 2023, p. 114.
8. Hájek P. *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
9. Hay L. S. Axiomatization of the infinite-valued predicate calculus. *Journal of Symbolic Logic* 28.1, 1963, p. 77–86.