О трехзначных логиках, сохраняющих промежуточное значение

Л. Ю. Девяткин
Институт философии РАН
deviatkin@iph.ras.ru

Аннотация. Статья посвящена классу трехзначных логик, которые сохраняют как классические, так и промежуточное значения. Ключевой вклад статьи — построение трехзначной логики с одним выделенным значением, эквивалентной по выразительным возможностям логике Pac. Этот результат получен с помощью использования альтернативного набора базовых операций — конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, без импликации, присутствующей в стандартной формулировке логики Pac. Таким образом, в статье предложен вариант логики Pac и его пара с одним выделенным значением, имеющие общий язык и представляющие собой расширения конъюнктивно-дизъюнктивного фрагмента классической логики с помощью неклассического отрицания. DOI: 10.52119/LPHS.2024.13.41.003.

Ключевые слова: трехзначные логики, выделенные значения, определимость связок, дуальность логических систем.

On Three-Valued Logics Preserving the Intermediate Value

Leonid Devyatkin
Institute of Philosophy RAS

Abstract. The paper is devoted to the class of three-valued logics that preserve both classical and intermediate values. The key contribution is the construction of a three-valued logic with one designated value, equivalent in expressive power to the logic Pac. This result is obtained by using an alternative set of primitive operations—conjunction, disjunction and negation, without the implication connective present in the standard formulation of Pac. Thus, the article proposes a variant of the logic Pac and its counterpart with one designated value, which have a common language and represent expansions of the conjunctive-disjunctive fragment of classical logic with a non-classical negation.

Keywords: three-valued logics, designated values, definability of connectives, duality between logical systems.

Эта статья посвящена классу трехзначных логик, которые одновременно обладают двумя свойствами. Во-первых, каждая формула принимает классическое значение, коль скоро всем входящим в нее пропозициональным переменным приписываются классические значения. Во-вторых, каждая формула принимает промежуточное значение, коль скоро всем входящим в нее пропозициональным переменным приписывается промежуточное значение. Основным результатом статьи является новая трехзначная логика с одним выделенным значением, которая обладает указанными выше свойствами. Эта логика представляет интерес, так как обладает наибольшей выразительной силой в своем классе: в ней определима любая трехзначная логика с одним выделенным значением, операции которой сохраняют как классические значения, так и промежуточное.

В литературе известно немало таких трехзначных логик с одним или двумя выделенными значениями, что все их операции выдают промежуточное значение, когда это значение принимают все их аргументы. Рассмотрим несколько таких операций и логик, в которых они используются.

x	$\sim x$
0	1
1/2	1/2
1	0

$\wedge_1$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\vee_1$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\wedge_2$	0	1/2	1
0	0	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$\vee_2$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2
1	1	1/2	1

$\wedge_3$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1
1	0	1	1

$\vee_3$	0	1/2	1
0	0	0	1
1/2	0	1/2	1
1	1	1	1

$\wedge_4$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	0
1	0	0	1

$\vee_4$	0	1/2	1
0	0	1	1
1/2	1	1/2	1
1	1	1	1

Логика со связками $\{\wedge_1, \vee_1, \sim\}$ и одним выделенным значением — это сильная логика Клини $\mathbf{K}_3$ [11]. Аналогичный набор связок, но с двумя выделенными значениями используется в логике Асеньо-Приста **LP** [1, 13]. Операции $\{\wedge_2, \vee_2, \sim\}$ с одним выделенным значением соответствуют слабой логике Клини $\mathbf{K}_3^w$ [12, p. 334]. С двумя выделенными значениями — паранепротиворечивой слабой логике Клини **PWK** [6]. Операции $\{\wedge_3, \vee_3, \sim\}$ с двумя выделенными значениями соответствуют логике Собочиньского $\mathbf{S}_3$ [15]. В логике **Z** используется набор операций $\{\wedge_2, \vee_3, \sim\}$ и два выделенных значения [9]. В работе [8] рассматриваются системы со следующими наборами операций: $\{\wedge_2, \vee_2, \sim\}$, $\{\wedge_2, \vee_3, \sim\}$, $\{\wedge_3, \vee_2, \sim\}$, $\{\wedge_4, \vee_3, \sim\}$, $\{\wedge_4, \vee_2, \sim\}$, $\{\wedge_4, \vee_4, \sim\}$, $\{\wedge_2, \vee_4, \sim\}$, $\{\wedge_3, \vee_4, \sim\}$.

Существенный интерес представляет трехзначная логика с двумя выделенными значениями, известная в литературе под несколькими именами: **Pac** [3], **PCont** [14], $\mathbf{RM}_3^{\supset}$ [2], $\mathbf{PI}^s$ [5]. В логике **Pac** два выделенных значения, а набор ее базовых операций имеет вид $\{\wedge_1, \vee_1, \sim, \supset\}$, где $\supset$ — импликация, предложенная С. Яськовским [10], которая отвечает приведенной ниже таблице.

$\supset$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1/2	1
1	0	1/2	1

Как показал А. Аврон [4], посредством операций **Pac** можно определить любую функцию на множестве $\{0, 1/2, 1\}$, которая сохраняет как классические значения $\{0,1\}$, так и промежуточное значение $1/2$. Таким образом, **Pac** — это логика с двумя выделенными значениями, язык которой обладает наибольшей выразительной силой в классе интересующих нас систем. Еще одна интересная особенность **Pac** состоит в том, что ее фрагмент в языке $\{\wedge_1, \vee_1, \supset\}$ совпадает с позитивным фрагментом классической пропозициональной логики [7].

На примерах $\mathbf{K}_3$, **LP**, а также $\mathbf{K}_3^w$, **PWK** видно, что зачастую трехзначные логики образуют пары, в которых различаются классы выделенных значений, но совпадают выразительные возможности операций. В то же время, насколько известно автору, в литературе не встречается **Pac** с одним выделенным значением. Одно из возможных объяснений состоит в том, что при единственном выделенном значении невозможно построить трехзначный вариант позитивного фрагмента классической логики, если все операции сохраняют промежуточное значение. В этом нетрудно убедиться, обратив внимание на следующий факт. Если $1/2 \to 1/2 = 1/2$ и 1 — единственное выделенное значение, то $\not\models p \to p$.

Тем не менее мы можем построить трехзначную логику с одним выделенным значением, совпадающую по выразительным возможностям с **Pac**, если откажемся от импликации. Для этого достаточно набора $\{\wedge_1, \vee_3, \sim\}$, поскольку выполняются следующие тождества:

- $x \vee_1 y = {\sim}({\sim}x \wedge_1 {\sim}y)$;
- $x \supset y = {\sim}(x \wedge_1 {\sim}y) \wedge_1 ((x \vee_3 y) \vee_1 ({\sim}x \vee_3 y))$.

Однако в парах $\mathbf{K}_3$, **LP** и $\mathbf{K}_3^w$, **PWK** все логики имеют один и тот же язык, в то время как **Pac** содержит импликацию, которая отсутствует в наборе $\{\wedge_1, \vee_3, \sim\}$. Чтобы восстановить симметрию между соответствующими логиками с одним и двумя выделенными значениями, построим языковой вариант **Pac** без импликации. Для этого достаточно рассмотреть набор $\{\wedge_3, \vee_1, \sim\}$. Эквивалентность выразительных возможностей $\{\wedge_3, \vee_1, \sim\}$ и $\{\wedge_1, \vee_1, \sim, \supset\}$ подтверждают тождества, приведенные ниже.

- $x \wedge_1 y = {\sim}({\sim}x \vee_1 {\sim}y)$;
- $x \vee_3 y = {\sim}({\sim}x \wedge_3 {\sim}y)$.

Таким образом, мы получили вариант **Pac** и его пару с одним выделенным значением, имеющие общий язык. Причем обе построенные логики представляют собой расширения конъюнктивно-дизъюнктивного фрагмента классической логики посредством неклассического отрицания.

Литература

1. Asenjo F. G. A calculus of antinomies. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 7, 1966, p. 103–105.
2. Avron A. On an implication connective of RM. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 27(2), 1986, p. 201–209.
3. Avron A. Natural 3-valued logics — characterization and proof theory. *The Journal of Symbolic Logic* 56(1), 1991, p. 276–294.
4. Avron A. On the expressive power of three-valued and four-valued languages. *Journal of Logic and Computation* 9(6), 1999, p. 977–994.
5. Batens D. Paraconsistent extensional propositional logics. *Logique et Analyse* 90/91, 1980, p. 195–234
6. Ciuni R. Conjunction in paraconsistent weak Kleene logic. *Logica Yearbook 2014*. Ed. by P. Arazim and M. Dancák. London: College Publications, 2015, p. 61–76.
7. D'Ottaviano I., da Costa N. C. A. Sur un problème de Jakowśki. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris. Ser. A* 270, 1970, pp. 1349–1353.
8. Finn V. K., Grigolia R.Nonsense logics and their algebraic properties. *Theoria* 59(1–3), 1993, p. 207–273.
9. Halkowska K. A note on matrices for systems of Nonsense-Logics. *Studia Logica* 48(4), 1989, pp. 461–464.
10. Jaśkowski S. Propositional calculus for contradictory deductive systems (communicated at the meeting of march 19, 1948). *Studia Logica* 24, 1969, pp 143–160.
11. Kleene S. C. On notation for ordinal numbers. *The Journal of Symbolic Logic* 3(4), 1938, p. 150–155.
12. Kleene S. C. *Introduction to metamathematics*. Groningen: Wolters–Noordhoff Publishing, 1952. 560 p.
13. Priest G. The logic of paradox. *Journal of Philosophical Logic* 8, 1979, p. 219–241.
14. Rozonoer L. I. On interpretation of inconsistent theories. *Information sciences* 47(3), 1989, p. 243–266.
15. Sobociński B. Axiomatization of a partial system of three-value calculus of propositions. *The Journal of Computing Systems* 1(1), 1952, p. 23–55.