Энтимематичность логического следования: альтернативный подход к решению парадокса материальной импликации

А. А. Ермаков
Институт философии человека, РГПУ им. А. И. Герцена
andrypopr@mail.ru

Аннотация. В статье демонстрируется альтернативный подход к рассмотрению парадокса материальной импликации. Предпринимается попытка решения парадокса классической логики на основе силлогистического учения Аристотеля. Энтимематическое представление формального вывода в логике высказываний позволяет определить отношение посылки к заключению содержательно. DOI: 10.52119/LPHS.2024.43.65.004.

Ключевые слова: семантическое следование, логическое следование, материальная импликация, парадоксы материальной импликации, энтимема.

Известным парадоксом языка классической логики высказываний является контринтуитивность материальной импликации [1, 2]. Он принимает различные трактовки, например наиболее распространённые звучат следующим образом: «из логического противоречия имплицируется всё что угодно», а также «общезначимое выражение имплицируется из чего угодно». Это ведёт не только к несогласованному толкованию условной связи с интуицией, но и к парадоксальности понятия самого логического следования, что затрудняет познание конкретных, содержательных законов частных наук. В связи с этим необходимо понять истоки парадоксальности материальной импликации в языке классической логики высказываний (ЯКВЛ) и сформулировать возможные пути решения проблемы.

Традиционными решениями парадокса материальной и строгой импликации являются системы E (of entailment) и R (of relevant implication) и их кванторные расширения EQ и RQ. Интерпретация отношения логического следования по *информации* составляет основную идею и задачу развития релевантной логики. Условная связь $A \supset B$ не имеет места, если B не имеет общих переменных с A. Таким образом, B есть логические следствие A, если и только если B составляет часть информации A.

Анализ отношения логического следования «B логически следует из A» (далее — $A \models B$) по содержанию — «логическое содержание B составляет часть логического содержания A» — позволяет раскрыть «онтологические» предпосылки множества возможных миров M, общего для формул A,B, обязывающие принимать принцип *полноты* некоторого мира $\alpha \in M$: $\forall p_n(p_n \in \alpha \vee \neg p_n \in \alpha)$, где p_n — пропозициональная переменная, α — возможный мир, M — множество возможных миров, а также для любого $\alpha \in M : \forall p_n(p_n \notin \alpha \vee \neg p_n \notin \alpha)$ — принцип *выполнимости* (непротиворечивости).

Иначе говоря, закон исключённого третьего и принцип не противоречия определяют возможное содержание данного мира. Закон непротиворечия формулируется в метаязыке и обуславливает возможность перехода от тождественной лжи к любой логической форме (ведь пустая информация составляет часть любой информации), а закон исключённого третьего, также формулирующийся в метаязыке, исчерпывает множество возможных миров, а потому следует из чего угодно. Решение парадоксальности ситуации релевантная логика видит в экспликации и устранении неосознанных посылок и замене классического описания состояния (мира) на обобщённое, позволяющее «пресыщенные оценки» и «истинностные провалы» [5]. Релевантная логика получила плодотворное развитие в трудах как зарубежных, так и отечественных логиков.

Другой подход к обоснованию парадоксов классической логики можно усмотреть в связи материальной импликации и понятия логического следования. Для более подробного рассмотрения их отношения определим понятие материальной импликации как функции от истинностных значений аргументов.
Определение 1.

$$im(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{если } A = 1, B = 1 \\ 1 & \text{если } A = 0, B = 1 \\ 0 & \text{если } A = 1, B = 0 \\ 1 & \text{если } A = 0, B = 0 \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что импликация истинна, когда антецедент ложен или следствие истинно. Такая расстановка значений аргументов и функций позволяет обнаружить следующую закономерность: импликация всегда истинна при истинном следствии. В обратную сторону (следствие всегда истинно при истинной импликации) неверно на аргументах $A = 0$ и $B = 0$: $imp(A,B) = 1$. Отсюда: если следствие истинно, то импликация истинна. Следовательно, правомерна следующая форма записи:

$$(B \supset (A \supset B)),$$

где B есть консеквент, а $A \supset B$ — функция.
Рассуждая аналогичным образом, получаем

$$\neg A \supset (A \supset B),$$

где $\neg A$ — антецедент, а $A \supset B$ — функция.
А именно, импликация всегда истинна, если основание ложно. Фактически здесь выражается обозначенный парадоксальный закон: из лжи следует всё, что угодно. Необходимо обратить внимание, во-первых, на метаязыковой характер сформулированных утверждений и, во-вторых, на исчерпываемость ими всех вариантов понимания импликации, отличных от случая, когда $im(A,B) = 0$ при $A = 1$, $B = 0$. В материальной импликации, понятой как функция от истинностных значений аргументов, важен порядок аргументов функции: A выражает логическое условие, B логическое следствие.
Данное понимание «таблицы» истинностных значений импликативной функции тесно связано с пониманием отношения логического следования. Определим классическое понятие семантического (логического) следования и построим вывод формулы B из формул A, B в системе гильбертовского типа, используя набор аксиом, сформулированных Лукасевичем.
Определение 2. $A \models B \Leftrightarrow\ \models A \supset B$
Схемы аксиом:
1. $B \supset (A \supset B)$
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
3. $(\neg A \supset \neg B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

Правило вывода:

$$\frac{A \qquad A \supset B}{B}$$

Пусть Γ — множество допущений, $A,B \in \Gamma$; тогда

- $A,B \vdash B$
- $A,B \vdash B \supset (A \supset B)$
- $A,B \vdash A \supset B$
- $A,B \vdash A$
- $A,B \vdash B$

Для систем типа H доказано утверждение, что всякая выводимая формула — тавтология. Следовательно, формула $A \supset B$, полученная на третьем шаге вывода, тождественно истинна, как и формула A, полученная на четвёртом шаге. Следовательно, по определению 2, $A \models B$. Обозначим данный вывод как случай 1. Далее, допустим $B \in \Gamma$; тогда

- $B \vdash B$
- $B \vdash B \supset (A \supset B)$
- $B \vdash A \supset B$

Логические содержание формулы A остаётся неизвестным. Условная связь $B \supset (A \supset B)$ позволяет перейти от утверждения B к его условию A. Если $A = 1$, то имеет место случай 1. Если $A = 0$, то B семантически следует из пустого множества истинных формул, т. е. из множества формул, истинностное значение которых на любом наборе значений переменных равно нулю: $\varnothing \models B$. Обозначим данный вывод как случай 2. Возможен, однако, третий случай, когда $\varnothing \models \varnothing$, но он не представляет значительного интереса постольку, поскольку в классическом исчислении высказываний выводимы тавтологии, и только они.

Рассмотренные три случая отражают следующие эпистемологические ситуации: из истины логически следует истина (случай 1), из лжи логически следует истина (случай 2), из лжи логически следует ложь (случай 3). Т. к. в практике научного познания нас интересуют (по большей части) истинные следствия, третий случай не релевантен. Остаются два случая логического следования. Второй случай также полно не отражает потребностей познавательной деятельности. Достаточно указать на то, что стремление в процессе познания обнаружить основания какого-то истинного высказывания преобладает над голой констатацией фактов. В случае 2 мы имеем пустое множество истинных высказываний, представляющих совокупность посылок, что не расширяет никак наше знание и не показывает необходимой связи. В случае 1 мы переходим от истинных оснований к истинным следствиям путём умозаключения по схеме $A, A \supset B$, что отражает наше интуитивное (в общем некорректное) понимание импликации как логического следования. Именно это понимание способствует расширению познания.

Следует заметить, что в аксиоматической исчислении высказываний вывод строится путём заключения от утверждения основания к утверждению следствия, где основание есть всегда тождественно истинная формула (например, аксиома). Поэтому в данном случае логическое следование понимается как функция материальной импликации от истины к истине.

Тем не менее этим ничего не сказано о смысловой связи антецедента и консеквента материальной импликации, посылок и заключения логического следования соответственно. Действительно, две тождественно истинные формулы логически следуют друг из друга, в противоположность второму случаю, где из B логически не следует $\varnothing$. Третий случай мы не рассматриваем по указанным выше причинам.

Таким образом, чтобы установить связь между посылкой и заключением логического следования, необходимо указать способ, которым соединяются антецедент и консеквент материальной импликации, понятой как логическое следование. Определим для этого понятие выводного предложения:

Определение 3. Пусть $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_i$ — вывод в системе H. Тогда B_n есть выводное предложение тогда и только тогда, когда B_n получена из двух предыдущих формул последовательности по правилу modus ponens.

Выводное предложение — это формула языка логики высказываний, представляющая собой заключение логического следствия и связанная с основанием логическим союзом «поскольку» и ближайшими его синонимами. Они в совокупности выражают свойство метаязыка, на котором артикулируется конкретное доказательно (или вывод) в системе. Например, связь $A \models B$ можно выразить так: «B, поскольку A», или «A, поэтому B». Закрепим для логического союза «поскольку» значение перехода от истинного основания к истинному следствию. Данная интерпретация логических символов языка указывает на возможность рассмотрения заключения B как категорического суждения. Проблема парадокса материальной импликации разрешается, если представить $A \models B$ как энтимему, где B есть заключение сокращённого силлогизма, а A есть большая или меньшая посылка соответственно. Заключение категорического силлогизма с необходимостью следует из его посылок при истинности таковых. Выводное предложение есть заключение простого категорического силлогизма с упущенной одной из посылок. Анализ формулы (выводного предложения) A в рассуждении типа $A, A \supset B \models B$, где $A = 1$ и $A \supset B = 1$ показывает отношение категорического суждения B, стоящего на месте заключения, и категорического суждения A, обосновывающего вывод, посредством раскрытия упущенной посылки C. Упущенная посылка C может быть большей или меньшей в зависимости от состава терминов, качества и количества посылки A. Таким образом, возможны два случая неполного силлогизма: с пропущенной большей и пропущенной меньшей посылкой.

Если пропущена большая посылка, то A составляет меньшую посылку вида SM с варьируемым качеством и количеством, а также положением среднего термина M в зависимости от фигуры и модуса силлогизма. В частности, по первой фигуре простого категорического силлогизма вывод (логическое следование) будет представлять собой следующую форму: $SM \models SP$, где SM есть A, SP есть B, а MP есть C. Например, Сократ человек, поэтому он смертен.

Если пропущена меньшая посылка, то A составляет большую посылку вида MP с варьируемым качеством, количеством и положением среднего термина M в зависимости от фигуры и модуса силлогизма соответственно. В частности, по первой фигуре имеем: $MP \models SP$, где MP есть A, SP есть B, а SM есть C. Например, Сократ смертен постольку, поскольку все люди смертны.

Алгоритм поиска явно не выраженной посылки можно найти в любом учебнике логики [3]. Нетрудно заметить, что явно не выраженная посылка может быть как истинной, так и ложной. Например, рассуждение «N прекрасно, ведь оно благо» явно апеллирует к посылке «всякое благое прекрасно», что, очевидно, ложно. Или, например, «N говорит на английском языке, потому что он европеец». Но утверждение, что все европейцы говорят на английском языке, в корне неверно даже при условии того, что возможно найти некоторого N, который, будучи европейцем, будет говорить на английском языке. Сформулируем правило для данного случая сокращённого силлогизма:

Определение 4. Пусть $A \models B$ — вывод сокращённого категорического силлогизма, где A — большая или меньшая посылка, B — заключение. Отношение категорического суждения B, стоящего на месте заключения, и категорического суждения A, стоящего на месте посылки, *случайно*, если и только если пропущенная посылка ложна.

Определим также и следование с необходимостью:

Определение 5. Пусть $A \models B$ — вывод сокращённого категорического силлогизма, где A — большая или меньшая посылка, B — заключение. Отношение категорического суждения B, стоящего на месте заключения, и категорического суждения A, стоящего на месте посылки, *необходимо*, если и только если рассуждение логически правильно.

Рассуждение считается логически правильным, когда положение среднего термина однозначно определено в отношении к модусам силлогизма. Следует отметить, что отношение категорического суждения B, стоящего на месте заключения, и категорического суждения A, стоящего на месте посылки, случайно по содержанию, в то время как оно всегда должно быть необходимым по форме.

Обратимся вновь к классическому понятию логического следования. Оно утверждает, что B логически следует из формул $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, если при любом наборе значений переменных, на котором $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ истинны, B тоже истинна. При этом достаточно показать, что *не существует* такого набора значений переменных, на котором $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$ ложна [4]. Данная формулировка допускает отсутствие какой-либо связи между двумя истинными высказываниями. Но энтимематическое отношение показывает, что если A истинно и B истинно, то при анализе высказываний A и B как суждений, входящих в состав сокращённого силлогизма, и восстановлении упущенной посылки отношение между ними может быть случайным. Следовательно, нельзя говорить о необходимой связи посылки A и заключения B лишь на основании истинного значения материальной импликации.

Проблема парадокса материальной импликации для языка классической логики высказываний разрешается только в рамках силлогистической трактовки её высказываний. Дальнейшее исследование конкретизирует случайное и необходимое отношение посылки и заключения логического следования по отношению к тем или иным модусам и фигурам простого категорического силлогизма. По сравнению с релевантной логикой данный результат представляется более перспективным в рамках анализа структуры естественных рассуждений.

В статье был проанализирован альтернативный подход к решению парадакса материальной импликации. Основные результаты были достигнуты путём ограничения понятия логического следования. Анализ утверждаемой посылки A в рассуждении $A \models B$ позволяет установить связь положения A и положения B посредством явно не выраженной посылки C.

Литература

1. Бочаров В. А., Маркин В. И. *Введение в логику: учебник.* М.: ИД «ФОРУМ»; ИНФРА-М, 2008.
2. Войшвилло Е. К., Дегтярев М. Г. *Логика как часть теории познания и научной методологии (фундаментальный курс). Книга I. Учебное пособие для студентов философских факультетов и преподавателей логики.* М.: Наука, 1994.
3. Войшвилло Е. К., Дегтярев М. Г. *Логика как часть теории познания и научной методологии (фундаментальный курс). Книга II. Учебное пособие для студентов философских факультетов и преподавателей логики.* М.: Наука, 1994.
4. Чупахин И. Я., Бродский И. Н. *Формальная логика.* Л.: Издательство Ленинградского университета, 1977.
5. Шрамко Я. Обобщенные истинностные значения: решетки и мультирешетки. *Логические исследования*, 2002, т. 9, с. 264–291.