Обобщенные аналитические таблицы для нормальной модальной K-системы логики направленности изменения

Н. И. Стешенко
Институт философии и социально-политических наук ЮФУ
steshenkon@list.ru

DOI: 10.52119/LPHS.2024.50.23.007.

Исходными символами немодальной части четырехзначной логики направленности изменения (логика Роговского) является $\to$ (импликация) и оператор **В** «возникает так, что...». Остальные операторы производны: **И** — «исчезает так, что...»; **Т** — «сильно утверждается, что...»; **У** — «уже есть так, что...»; **Е** — «еще есть так, что...».

Главным модальным оператором является оператор «необходимо, что...». Формулировка схем аксиом логики Роговского опускается. Аксиомные схемы нормальной модальной **K**-системы логики направленности изменения:

а1 $\mathbf{T}\Box(A \to C) \to (\Box A \to \Box C)$

Аксиомные схемы для операторов **Т**, **В**, **У**, **Е**, **И**:

а2 $\mathbf{T}\Box A \to \Box\mathbf{T}A$ (конверсия импликации доказуема);

а3 $\mathbf{T}\Box\mathbf{B}A \to \mathbf{B}\Box A$;

а3.1 $\mathbf{TB}\Box A \to \Box\mathbf{B}A$;

а4 $\mathbf{У}\Box A \to \Box\mathbf{У}A$;

а4.1 $\Box\mathbf{У}A \to \mathbf{У}\Box A$;

а5 $\mathbf{E}\Box A \to \Box\mathbf{E}A$;

а5.1 $\Box\mathbf{E}A \to \mathbf{E}\Box A$;

а6 $\mathbf{T}\Box\mathbf{И}A \to \Box\mathbf{И}A$;

а6.1 $\mathbf{TИ}\Box A \to \Box\mathbf{И}A$.

Правила доказательств:

$$[\text{пр1}]\ \frac{\vdash \mathbf{T}A \to C \qquad \vdash A}{\vdash C}$$

$$[\text{пр2}]\ \frac{\vdash A[C] \qquad C =_{df} D}{A[D]}$$

[пр2] — правило дефиницииальной замены, где C и D — подформулы формулы A.

$$[\text{пр3}]\ \frac{\vdash A}{\vdash \Box A} \qquad\qquad [\text{пр4}]\ \frac{\vdash A \to C}{\vdash \Box A \to \Box C}$$

[пр3] — основное правило Геделя; [пр4] — выводимое правило Геделя.

Оператор возможности вводится определением: $\Diamond A =_{df} \sim\Box\sim A$.

Понятие доказательства и доказуемой формулы обычные.

Синтаксический аспект **K**-системы был рассмотрен в работах [1] и [2]. Семантический аспект **K**-системы начал изучаться в [3].

Аналитические таблицы для немодальной логики направленности изменения были рассмотрены в работе [4]. Использование помеченных формул технически выгодно. Опуская детали, которые даны в [4], отметим, что истинностные значения $3, 2, 1, 0$ (где 3 — выделенное истинностное значение) превращаются в синтаксические операторы формул: $\mathbf{3}A, \mathbf{2}A, \mathbf{1}A, \mathbf{0}A$ и, соответственно, читаются: «A истинно», «A подыстинно», «A надложно», «A ложно». Как обычно, построение аналитической таблицы для любой формулы начинается из предположения, что данная формула не общезначима. Для простых аналитических таблиц это означает, что что надо строить три аналитических таблицы для фиксированной формулы — $\mathbf{2}A, \mathbf{1}A, \mathbf{0}A$, причем максимальное число ветвей может равняться пяти. Это ведет к громоздким конструкциям по сравнению с классической логикой [4, с. 201–203], что неудобно даже для проверки общезначимости формул, имеющих небольшое число логических связок и операторов.

Систематическое решение задачи уменьшения числа аналитических таблиц и их ветвей было предложено Хенле [5], он назвал эти таблицы обобщенными аналитическим таблицами. Теперь построение аналитической таблицы начинается с одного предположения «$\mathbf{0}A$ или $\mathbf{1}A$, или $\mathbf{2}$» и обозначается как $\mathbf{012} : A$. Возможны такие виды помеченных формул: $\mathbf{012} : A$, $\mathbf{01} : A$, $\mathbf{02} : A$, $\mathbf{12} : A$, $\mathbf{0}A$, $\mathbf{1}A$, $\mathbf{2}A$, которые получены из множеств $\{0, 1, 2\}$ истинностных значений и всех его подмножеств, кроме пустого. Выделенное истинностное значение обозначается как $\mathbf{3}A$.

Обобщенной помеченной формулой называется формулы вида $\mathbf{012} : A$, $\mathbf{01} : A$, $\mathbf{02} : A$, $\mathbf{12} : A$.

Обобщенным правилом редукции называется любое правило, в котором в посылке или заключении имеется хотя бы одна обобщенная помеченная формула.

Семантические и синтаксические подробности обоснования обобщенных правил редукции содержатся в [4, с. 204–219].

Правила $\to_1$, $\to_2$ модифицируются. Но правила $\to_3$, $\to_0$ такие же, как и для простых аналитических таблиц. *Остальные правила редукции для простых аналитических таблиц опускаются* [4, с. 186–187]. Но при проверке общезначимости а3 они используются.

$$\to_1\!: \;\; \frac{\mathbf{1}(A \to B)}{\begin{array}{c|c} \mathbf{2}A & \mathbf{3}A \\ \mathbf{01}B & \mathbf{1}B \end{array}} \qquad \to_2\!: \;\; \frac{\mathbf{2}(A \to B)}{\begin{array}{c|c|c} \mathbf{1}A & \mathbf{12}A & \mathbf{3}A \\ \mathbf{2}B & \mathbf{2}B & \mathbf{2}B \end{array}}$$

$$\to_3\!: \;\; \frac{\mathbf{3}(A \to B)}{\begin{array}{c|c} \mathbf{0}A & \mathbf{3}B \end{array}} \qquad \to_0\!: \;\; \frac{\mathbf{0}(A \to B)}{\mathbf{3}A, \mathbf{0}B}$$

Модифицированные правила $\mathbf{T}_0$, $\sim\!\mathbf{T}_3$, $\mathbf{У}_0$, $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{T}_0 : \;\; \frac{\mathbf{0T}A}{\mathbf{012}A} \quad \sim\!\mathbf{T}_3 : \;\; \frac{\mathbf{3}\!\sim\!\mathbf{T}A}{\mathbf{012}A} \quad \mathbf{У}_0 : \;\; \frac{\mathbf{0У}A}{\mathbf{01}A} \quad \mathbf{E}_0 : \;\; \frac{\mathbf{0E}A}{\mathbf{02}A}$$

Обобщенные правила $\to_{01}$, $\to_{02}$, $\to_{12}$, $\to_{012}$ и др.:

Понятие *замкнутой* ветви (пути), *полной* ветви и *завершенной* таблицы дано в [4, с. 190–192, 214–215]. Структура заключений правил редукции показывает *число ветвей*, порождаемых тем или иным правилом.

K-фрейм модальной логики направленности изменения есть пара $\mathcal{F} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{R} \rangle$, где $\mathbf{W}$ — непустое множество возможных миров (т. е. $\mathbf{W} \neq \emptyset$).

$\mathbf{R}$ ($\mathbf{R} \subset \mathbf{W} \times \mathbf{W}$) есть бинарное (двухместное) отношение достижимости между возможными мирами. Отношение достижимости двухзначное ($\{3\}$,$\{0\}$), но в каждом возможном мире действует четырехзначная модальная логика направленности изменения.

Модель есть тройка $\mathcal{M} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{V} \rangle$, где $\mathbf{W}, \mathbf{R}$ есть члены фрейма; $\mathbf{V}$ — всюду определенная бинарная функция оценки из $\mathbf{Pr} \times \mathbf{W}$ в $\{3, 2, 1, 0\}$, где $\mathbf{Pr}$ — множество пропозициональных переменных анализируемой логики. $\mathbf{V}(p, w) \in \{3, 2, 1, 0\}$ для любых $p \in \mathbf{Pr}$ и $w \in \mathbf{W}$ читается «p в возможном мире wА имеет истинностное значение 3 или 2…». Сформулируем правила для импликации

$$\to_{01}: \quad \frac{\mathbf{01} : (A \to B)}{\begin{array}{c|c} \mathbf{2}A & \mathbf{3}A \\ \mathbf{01}B & \mathbf{01}B \end{array}} \qquad \to_{02}: \quad \frac{\mathbf{02} : (A \to B)}{\begin{array}{c|c|c} \mathbf{1}A & \mathbf{12}A & \mathbf{3}A \\ \mathbf{01}B & \mathbf{2}B & \mathbf{02}B \end{array}}$$

$$\to_{12}: \quad \frac{\mathbf{12} : (A \to B)}{\begin{array}{c|c|c} \mathbf{12}A & \mathbf{3}A & \mathbf{12}A \\ \mathbf{01}B & \mathbf{12}B & \mathbf{2}B \end{array}} \qquad \to_{012}: \quad \frac{\mathbf{012} : (A \to B)}{\begin{array}{c|c} \mathbf{12}A & \mathbf{3}A \\ \mathbf{012}B & \mathbf{012}B \end{array}}$$

правила для оператора **B**

$$\mathbf{B}_{01}: \quad \frac{\mathbf{01} : \mathbf{B}A}{\begin{array}{c|c} \mathbf{1}A & \mathbf{3}A \end{array}} \quad \mathbf{B}_{02}: \quad \frac{\mathbf{02} : \mathbf{B}A}{\mathbf{01}A} \quad \mathbf{B}_{12}: \quad \frac{\mathbf{12} : \mathbf{B}A}{\begin{array}{c|c} \mathbf{0}\mathrm{A} & \mathbf{3}A \end{array}} \quad \mathbf{B}_{012}: \quad \frac{\mathbf{012} : \mathbf{B}A}{\begin{array}{c|c} \mathbf{01}A & \mathbf{3}A \end{array}}$$

правила оценки сложных формул индукцией по числу логических операторов и связок. Если A — атомарная формула, то $\mathbf{V}(A, w) = \mathbf{V}(p, w)$, т. е. задано моделью.

Немодальный фрагмент оценок сложных формул устанавливается на основе обобщенных правил редукции.

Замечание. Для лучшего обозрения условий истинности вместо, например, $\mathbf{V}(\mathbf{B}A, w) = 01 \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{1}A, w) = 1$ или $\mathbf{V}(\mathbf{3}A, w) = 3$ будем писать $\mathbf{V}(\mathbf{01} : \mathbf{B}A, w) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{1}A, w)$ или $\mathbf{V}(\mathbf{3}A, w)$, так как синтаксический истинностный оператор формулы соответствует истинностному значению той же формулы.

Оценки для оператора **B**

1.1. $\mathbf{V}(\mathbf{01} : \mathbf{B}A, w) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{1}A, w)$ или $\mathbf{V}(\mathbf{3}A, w)$;

2.2. $\mathbf{V}(\mathbf{02} : \mathbf{B}A, w) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{01}A, w)$;

3.3. $\mathbf{V}(\mathbf{12} : \mathbf{B}A, w) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{0}A, w)$ или $\mathbf{V}(\mathbf{3}A, w)$;

4.4. $\mathbf{V}(\mathbf{012} : \mathbf{B}A, w) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{01}A,w)$.

Оценки для оператора $\sim$

2.1. $\mathbf{V}(\mathbf{01} : {\sim}A,w) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{2}A, w)$ или $\mathbf{V}(\mathbf{3}A, w)$;

2.2. $\mathbf{V}(\mathbf{12} : {\sim}A, w) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{12} : A, w)$;

2.3. $\mathbf{V}(\mathbf{02} : {\sim}A, w) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{1}A, w)$ или $\mathbf{V}(\mathbf{3}A, w)$;

2.4. $\mathbf{V}(\mathbf{012} : {\sim}A, w) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{12} : A, w)$ или $\mathbf{V}(\mathbf{3}A, w)$.

Аналогично определяются оценки истинности в возможных мирах для формул с другими операторами: $\mathbf{T}_0$, $\sim\mathbf{T}_3$, $\mathbf{У}_0$, $\mathbf{E}_0$, **И**, **Т**, $\sim$**Т**, **У**, **Е**.

Укажем оценки лишь для некоторых импликаций.

Оценки для импликации

$\mathbf{V}(\mathbf{01} : (A \to B),w) \Leftrightarrow (\mathbf{V}(\mathbf{2}A, w), \mathbf{V}(\mathbf{01} : B,w))$ или $(\mathbf{V}(\mathbf{3}A,w), \mathbf{V}(\mathbf{01} : B,w))$;

$\mathbf{V}(\mathbf{02} : (A \to B),w) \Leftrightarrow (\mathbf{V}(\mathbf{1}A,w), \mathbf{V}(\mathbf{01} : B, w))$, или $(\mathbf{V}(\mathbf{12} : A, w), \mathbf{V}(\mathbf{2}B,w))$, или $(\mathbf{V}(\mathbf{2}A,w), \mathbf{V}(\mathbf{02} : B,w))$;

$\mathbf{V}(\mathbf{12} : (A \to B),w) \Leftrightarrow (\mathbf{V}(\mathbf{12} : A,w), \mathbf{V}(\mathbf{01} : B,w))$, или $(\mathbf{V}(\mathbf{3} : A,w), \mathbf{V}(\mathbf{12} : B,w))$, или $(\mathbf{V}(\mathbf{12} : A,w), \mathbf{V}(\mathbf{2} : B,w))$;

$\mathbf{V}(\mathbf{012} : (A \to B), w) \Leftrightarrow (\mathbf{V}(\mathbf{12} : A, w), \mathbf{V}(\mathbf{012} : B, w))$, или $(\mathbf{V}(\mathbf{3}A, w), \mathbf{V}(\mathbf{012} : B,w))$.

Оценки для $\mathbf{i}\Box A$ ($0 \leq \mathbf{i} \leq 3$, где 3 — выделенное значение)

$\mathbf{V}(\mathbf{3}\Box A, w) = 3 \Leftrightarrow \forall w^*(R(w, w^*) \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{3}A, w^*) = 3)$

правила для отрицания (слабого) $\sim$

$$\sim_{01}\!: \ \frac{\mathbf{01} : \sim A}{\mathbf{2}A \mid \mathbf{3}A} \quad \sim_{02} \ \frac{\mathbf{02} : \sim A}{\mathbf{1}A \mid \mathbf{3}A} \quad \sim_{12}\!: \ \frac{\mathbf{12} : \sim A}{\mathbf{12}A} \quad \sim_{012}\!: \ \frac{\mathbf{012} : \sim A}{\mathbf{12}A \mid \mathbf{3}A}$$

правила для отрицания (сильного) $\sim\mathbf{T}$
(заключения правил $\sim\mathbf{T}_{01} = \sim\mathbf{T}_{02} = \sim\mathbf{T}_{012}$ совпадают)

$$\sim\mathbf{T}_{01} : \ \frac{\mathbf{01} : \sim\mathbf{T}A}{\mathbf{3}A} \quad \sim\mathbf{T}_{12} : \ \frac{\mathbf{12} : \sim\mathbf{T}A}{\mathbf{0}A, \mathbf{3}A}$$

правила для оператора **И**

$$\mathbf{И}_{01} : \ \frac{\mathbf{01} : \mathbf{И}A}{\mathbf{02}A} \quad \mathbf{И}_{02} : \ \frac{\mathbf{02} : \mathbf{И}A}{\mathbf{2}A \mid \mathbf{3}A} \quad \mathbf{И}_{12} : \ \frac{\qquad}{\mathbf{0}A \mid \mathbf{3}A} \quad \mathbf{И}_{012} : \ \frac{\mathbf{012} : \mathbf{И}A}{\mathbf{02}A \mid \mathbf{3}A}$$

правила для оператора **Т**
($\mathbf{T}_{01} = \mathbf{T}_{02} = \mathbf{T}_{012}$, т. е. заключения этих правил совпадают)

$$\mathbf{T}_0 1 : \ \frac{\mathbf{01} : \mathbf{T}A}{\mathbf{012} : A} \quad \mathbf{T}_{12} : \ \frac{\mathbf{12} : \mathbf{T}A}{\mathbf{0}A, \mathbf{3}A}$$

правила для оператора **У**
($\mathbf{У}_{01} = \mathbf{У}_{02} = \mathbf{У}_{012}$, т. е. заключения этих правил совпадают)

$$\mathbf{У}_0 1 : \ \frac{\mathbf{01} : \mathbf{У}A}{\mathbf{12} : A} \quad \mathbf{У}_{12} : \ \frac{\mathbf{12} : \mathbf{У}A}{\mathbf{0}A, \mathbf{3}A}$$

правила для оператора **Е**
($\mathbf{E}_{01} = \mathbf{E}_{02} = \mathbf{E}_{012}$, т. е. заключения этих правил совпадают)

$$\mathbf{E}_0 1 : \ \frac{\mathbf{01} : \mathbf{E}A}{\mathbf{02} : A} \quad \mathbf{E}_{12} : \ \frac{\mathbf{12} : \mathbf{E}A}{\mathbf{0}A, \mathbf{3}A}$$

$\mathbf{V}(\mathbf{2}\Box A,w) = 2 \Leftrightarrow \forall w^*(R(w, w^*) \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{2}A, w^*) = 2)$
$\mathbf{V}(\mathbf{1}\Box A, w) = 1 \Leftrightarrow \forall w^*(R(w, w^*) \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{1}A, w^*) = 1)$
$\mathbf{V}(\mathbf{0}\Box A, w) = 1 \Leftrightarrow \exists w^*(R(w, w^*))$ и $\mathbf{V}(\mathbf{0}A, w^*) = 0)$

Функции оценки $\mathbf{i}\Box A$ легко распространить на формулы с обобщенными истинностными оценками $\mathbf{i} \in \{\mathbf{012} : A, \mathbf{01} : A, \mathbf{02} : A, \mathbf{12} : A\}$.

Понятия формулы A, *истинной*, *опровержимой* в модели $\mathcal{M}$ на основе **K**-фрейма, стандартные.

Формула A *общезначима* в классе **K**-фреймов, е. т. е. A истинна в каждом **K**-фрейме.

K-система называется *корректной*, если любая доказуемая в ней формула общезначима в классе **K**-фреймов.

Аналитической таблице *соответствует* возможный мир, отношению между таблицами *соответствуют* отношения между возможными мирами. Таблица обозначается $\mathbf{t}_i, 1 < i \leq n$; отношение между таблицами — $\mathbf{t}_i S \mathbf{t}_{i+1}$.

Отмечу главные черты построения аналитических таблиц.

- Таблица, построение которой начинается с формулы $\mathbf{012} : A$, называется *главной*, остальные — это *производные* таблицы; каждый шаг в построении таблицы, кроме первого, есть заключение правила редукции.

- Каждая таблица есть множество помеченных формул.
- Формулы вида **012** : A, **01** : A, **02** : A, **0** : A порождают новые таблицы.

Ветвь θ таблицы называется *замкнутой*, если на ветви имеются помеченные формулы j_1A_1, $j_2A_2, \ldots, j_nA_n$, такие, что $A_2 = A_3 = \ldots = A_m$ и $\{j_1\} \cap \{j_2\} \cap \ldots \cap \{j_m\} = \emptyset$, где $j \in \{\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{012}, \mathbf{01}, \mathbf{02}, \mathbf{12}\}$ и $1 < m \leq n$. В противном случае, т. е. когда пересечение непусто, ветвь не является закмнутой.

Аналитическая таблица замкнута, если все ее ветви замкнуты. Формула A *общезначима*, е. т. е. аналитическая таблица, построение которой начинается с **012**A, замкнута.

Проверим общезначимость а3: $\mathbf{T}\Box\mathbf{B}A \to \mathbf{B}\Box A$.

$\mathbf{t}_1$

1. **012** : $\mathbf{T}\Box\mathbf{B}A \to \mathbf{B}\Box A$

2. **12** : $\mathbf{T}\Box\mathbf{B}A$ — 1	4. **3** : $\mathbf{T}\Box\mathbf{B}A$ — 1	
3. **012** : $\mathbf{B}\Box A$ — 1	5. **012** : $\mathbf{B}\Box A$ —1, правило $\to_{012}$	
6. **3** : $\Box\mathbf{B}A$, **0** : $\Box\mathbf{B}A$ — 2, правило $\mathbf{T}_{12}$	7. **3** : $\Box\mathbf{B}A$ — 4, правило $\mathbf{T}_3$	
противоречие: 6	8. **01** : $\Box A$ — 5, правило $\mathbf{B}_{012}$	9. **3** : $\Box A$ — 5, правило $\mathbf{B}_{012}$

$\mathbf{t}_1S\mathbf{t}_2$	$\mathbf{t}_1S\mathbf{t}_2$
1. **01** : A — $\mathbf{t}_1$ — 8	1. **3** : A — $\mathbf{t}_1$ — 9
2. **3B**A — $\mathbf{t}_1$ — 7	2. **3B**A — $\mathbf{t}_1$ — 7
3. **2**A — 2, правило $\mathbf{B}_3$	3. **2**A — 2, правило $\mathbf{B}_3$
противоречие: 1, 3	**противоречие**: 1, 3

Таким образом, а3 *общезначима.*

Теорема корректности. Для всякой формулы A, если формула A доказуема в модальной **K**-системе, то она общезначима в классе **K**-фреймов.

Доказательство. Несложно показать, что все аксиомы **K**-системы общезначимы, все правила **K**-системы сохраняют общезначимость.

Литература

1. Стешенко Н. И. Нормальная **K**-система логики направленности изменения (синтаксический аспект). *Логико-философские штудии*, 2018, т. 16, № 1–2, с. 125–126.
2. Стешенко Н. И. Логика направленности изменения: нормальная модальная **K**-система. *Логика, методология, науковедение: интеллектуальные практики, стратегии и паттерны. Материалы всероссийской конференции (Ростов-на-Дону, 16–19 мая 2019 г.). В 2-х т.* Т. 1. 2019, с. 104–106.
3. Стешенко Н. И. Семантика **K**-нормальной модальной логики направленности изменения. Теорема корректности. *Одиннадцатые Смирновские чтения. Материалы международной научной конференции, 19–21 июня 2019 г., Москва.* 2019, с. 83–86.
4. Стешенко Н. И. Аналитические таблицы для пропозициональной логики Роговского. *Логические исследования.* Вып. 15. М.: Наука, 2009, с. 185–219.
5. Hähnle R. Towards an efficient tableau proof procedure for multiple-valued logics. *Computer Science Logic 4th Workshop, CSL ’90, Heidelberg, Germany, October 1–5, 1990.* Springer: 1990, pp. 248–260.