

**К вопросу о «релевантном» принципе дедукции**

А. Ю. Моисеева

НИУ «Высшая школа экономики»

aymoiseeva@hse.ru

**Аннотация.** Рассматривается проблема формулировки аналога теоремы дедукции для релевантной логики. Раскрываются значение этой теоремы для логики в целом и причины затруднения с ней, возникающего в рамках релевантной логики. Приводятся различные способы разрешения затруднения, связанные с переопределением понятия вывода из посылок, и анализируются последствия. Делается вывод о том, что принцип дедукции для релевантной логики, будучи формально чисто синтаксическим, по сути является средством переноса синтаксических свойств исчисления на уровень семантики. DOI: 10.52119/LPHS.2024.87.29.004.

**Ключевые слова:** релевантная импликация, логическое следование, теорема дедукции.

**Введение.** Любая логика, содержащая оператор импликации, сталкивается с задачей определения соотношения между суждениями, утверждающими выводимость некоторых следствий из некоторых посылок, и импликативными предложениями. В классической логике соотношение между ними устанавливается *теоремой дедукции*:

$$\Gamma, \phi \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi. \quad (1)$$

Данная теорема изучается в обязательном порядке в любом курсе формальной логики и является, на наш взгляд, наиболее ясным выражением того, для чего логика вообще нужна. По поводу ее важности Е. А. Сидоренко, например, замечает: «[П]ри отсутствии теоремы дедукции в некоторой теории трудно (я думаю, просто невозможно) обосновать содержательную оправданность предлагаемого этой теорией описания (формализации) условной связки. Хотя бы уже потому, что в естественных рассуждениях обоснование истинности условных высказываний осуществляется с помощью приема, равносильного применению теоремы дедукции» [2, с. 194]. Однако не каждый способ задания аксиом для импликации приводит к тому, что в рамках получившейся логической теории теорема дедукции в ее привычной форме (1) оказывается доказуемой или даже приемлемой в качестве априорного принципа<sup>12</sup>. Зачастую, чтобы получить приемлемую в конкретной теории форму принципа дедукции, требуется дополнительная работа, как сугубо техническая, так и философская.

Ввиду того факта, что релевантное понимание импликации как раз и создает эту описанную выше проблему, задача настоящей статьи — прояснить вопрос о том, *что именно утверждает «релевантный» принцип дедукции*. Следует отметить, что в литературе по релевантной логике достаточно подробно разбираются формулировки теоремы дедукции для различных систем. Мы здесь не претендуем что-то добавить к этим формальным построениям. Наша задача более скромная — осмыслить источник самой проблемы и то, что содержательно собой представляет ее решение, каким бы оно ни было. Для этого сначала мы обратимся к мотивации для построения релевантной логики как таковой и принципам, общим для всех релевантных логик, затем посмотрим, как в различных логиках решается вопрос с принципом дедукции, и в конце сформулируем некоторое заключение.

<sup>12</sup>Идея того, что дедукцию можно устанавливать априорно, а не доказывать в качестве теоремы, была взята из цитировавшейся выше работы Е. А. Сидоренко, равно как и само словосочетание «принцип дедукции».

**Логическое следование и импликация в релевантной логике.** Известно, что, по крайней мере частично, создание первых логик с релевантной импликацией мотивировалось стремлением более адекватно, чем это делается в рамках классической логики, выразить формальными средствами понятие логического следования в том виде, в котором оно функционирует в рассуждениях на естественном языке (см. [1, с. 263–264]; также этот мотив комментируется в [2, с. 42]). Поскольку с точки зрения классической логики логическое следование представляет собой условие сохранения истинности, в само его определение включается требование истинности посылок. В релевантной логике требование истинности посылок снимается и заменяется требованием их совместимости. Это делает логику по сути интенциональной, за счет чего она оказывается способной формализовать не только ассерторические, но и гипотетические и контрфактические рассуждения. В том же духе переопределяется и само понятие логического следования: вместо требования о наличии между посылками и заключением связи по истинности выдвигается требование о наличии между ними определенного рода «связи по смыслу». По поводу характера этой связи у И. Е. Орлова мы находим такое пояснение: «Указанная „связь по смыслу“ охватывает все те случаи, когда предшествующий член предполагает последующий или невозможен без него» [1, с. 264]. Невозможность здесь понимается опять-таки интенционально, как невозможность совместно мыслить или полагать в качестве истинных посылки, не мысля или не полагая истинным заключения.

Коль скоро релевантная импликация предназначена для выражения такого, интенционального, понятия следования, она тоже получает интенциональную трактовку. Минимальное формальное требование заключается в том, чтобы импликация была выводима лишь при условии, что ее антецедент и консеквент имеют хотя бы одну общую пропозициональную переменную. В различных системах релевантной логики принимаются различные дополнительные ограничения. Так, в логике **E** импликация должна быть не только релевантной, но и строгой (strict); в исчислении совместности предложений И. Е. Орлова не принимаются такие свойства импликации, как упрощение антецедента  $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$  и ослабление консеквента  $\phi \rightarrow (\phi \vee \psi)$ ; в логике **S** не принимается даже т. н. само-импликация  $\phi \rightarrow \phi$ .

В целом, мотивы для введения каждого из вариантов релевантной импликации не являются очевидными и бесспорными. Некоторые сторонники релевантной логики (см., например, [2, с. 42 и далее]) вообще считают разговор о логическом следовании совершенно излишним в этом контексте. Тем не менее мы будем придерживаться именно такой общей трактовки мотивов в силу исторических причин, а также потому, что, как мы увидим ниже, в некоторых аспектах она действительно помогает прояснить то, что происходит с принципом дедукции в релевантной логике.

**Семантическая функция «релевантного» принципа дедукции.** Как было доказано еще в 1970-х гг. [3, с. 57], принцип дедукции в форме (1) без всяких ограничений имеет силу не только в классической логике, но в любой логике, где есть *modus ponens* и где доказуемы все подстановочные примеры формул

$$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi) \tag{2}$$

$$(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)) \tag{3}$$

В релевантных логиках формулы (2) и (3) имеют различный статус. Формула (3) во многих из них принимается как аксиома, либо принимается эквивалентная ей [4, р. 79–80] аксиома

$$(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \tag{3'}$$

И это вполне оправданно, поскольку принятие формулы (3) или какого-то ее эквивалента соответствует интуиции, лежащей в основе интенционального понимания импликации. Что бы мы ни понимали под выражениями «предполагать» и «быть невозможным без...» (логическое следование или что-то другое), кажется естественным считать отношение, обозначаемое этими выражениями, транзитивным.

Что же касается формулы (2), она известна в контексте релевантной логики под названием «позитивный парадокс» и отвергается как пример фиктивной (нерелевантной) формы вывода. При этом очевидно, что при принятии (1) легко можно получить не только (2), но и другие «парадоксальные» формулы, например

$$\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \quad (4)$$

Причем выводимость формул типа (2) даже не зависит от аксиоматики, они получаются непосредственно из принципа дедукции; а формулы типа (4) можно получить лишь при одном дополнительном условии — наличии в логике т. н. принципа взрыва. Например, обе эти формулы выводимы в интуиционистской логике.

Чтобы избежать получения формул типа (2), создатели большинства релевантных логик принимают узкое определение вывода, *релевантного относительно посылки A*, и так или иначе переформулируют принцип дедукции, ограничивая его действие только выводами указанного типа (подробнее см. [5, р. 135–139]). Релевантность вывода относительно посылки проверяется посредством прослеживания зависимости, аналогичного тому, как в классической логике мы прослеживаем, от каких посылок зависит заключение, чтобы корректно применять правило генерализации. При таком определении вывода формула (2) оказывается невыводимой, поскольку использование посылки *B* в ней является фиктивным (нерелевантным). Что же касается формул типа (4), они могут исключаться с помощью принятия различных аксиоматик, не реализующих принцип взрыва.

Другой подход [2, с. 182] связан с переопределением понятия вывода из посылок *вообще*. Идея этого подхода заключается в том, что нужно разрешить использование принципа непротиворечия, но так, чтобы требование релевантности при этом не нарушалось. Для этого принцип непротиворечия выводится за рамки аксиоматики и превращается в метаправило, на применение которого в выводе накладываются определенные ограничения. Мы не будем здесь подробно рассматривать этот интересный подход, заметим лишь, что в его русле также оказывается доступной формулировка принципа дедукции, соответствующего некоторой минимальной аксиоматике для импликации [там же, с. 191 и далее].

Если теперь вернуться к тезису о том, что в релевантной логике импликация предназначена для выражения интенционального следования, то вырисовывается следующая картина. Получается, что различные варианты «релевантного» принципа дедукции, который с формальной точки зрения является чисто синтаксическим (мета)принципом, на деле выполняют семантическую функцию — определяют нечто, относящееся к смыслу предложений  $\phi$  и  $\psi$ . И определяют они это совершенно различным образом в силу различного определения того вывода, который фигурирует в утверждении. Иначе говоря, происходит перенос синтаксического понятия на уровень семантики, предполагающий некую «подгонку» модели под логику так, чтобы в этой модели нашлась какая-то более или менее интуитивная интерпретация для импликации с заданными свойствами.

В связи с этим симптоматично появление в некоторых вариантах семантик для релевантной логики «гибридных» принципов, аналогичных принципу дедукции. Так, в ситуационной се-

мантике для релевантной логики DJWI+ (сам автор предпочитает называть ее инфологикой), представленной в [7], можно доказать «гибридный» ситуационный аналог<sup>13</sup> теоремы дедукции в правом и левом вариантах:

RD: Если  $\phi \vdash \psi$  и  $s \Vdash \psi \rightarrow \chi$ , то  $s \Vdash \phi \rightarrow \chi$ .

LD: Если  $\phi \vdash \psi$  и  $s \Vdash \sigma \rightarrow \psi$ , то  $s \Vdash \sigma \rightarrow \psi$ .

Здесь  $s$  — это ситуация, которая моделируется как точка из множества точек модели, построенной автором по образцу моделей Раутли — Мейера. Выполнение утверждений RD и LD обеспечивается тем, что в модели присутствует выделенный класс точек  $L$ , такой, что в каждой из них «экземплифицируются» все логические выводы:

$$\forall s \in L : \text{если } \phi \vdash \psi, \text{ то } s \Vdash \phi \rightarrow \psi.$$

Таким образом осуществляется явный перенос в семантику синтаксических отношений между предложениями.

**Заключение.** Из предыдущего рассуждения можно заключить, что «релевантный» принцип дедукции не является в чистом виде синтаксическим принципом. Более точно, будучи синтаксическим по форме, он несет в себе существенную семантическую информацию, а именно информацию о модели. Эта информация определяет то, как связаны между собой смыслы предложений, которые образуют антецедент и консеквент релевантной импликации. Понятно, что характер этой связи невозможно прояснить, пока не будет определено, как именно должен моделироваться собственно смысл. И поскольку существует множество подходов к построению семантики для релевантной логики, никакого общего ответа здесь дать нельзя. Однако представляется оправданным исследовать этот вопрос на примере по крайней мере нескольких основных подходов, чтобы в дальнейшем сопоставить друг с другом полученные там результаты.

## Литература

1. Орлов И. Е. Исчисление совместности предложений. *Математический сборник*, 1928, т. 35, вып. 3–4, с. 263–286.
2. Сидоренко Е. А. *Релевантная логика (предпосылки, исчисления, семантика)*. М.: ИФ РАН, 2000.
3. Смирнов В. А. *Формальный вывод и логические исчисления*. М.: Наука, 1972.
4. Anderson A. R., Belnap N. D. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. 1. Princeton: Princeton University Press, 1975.
5. Dunn J. M. Relevance Logic and Entailment. *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. III / ed. by F. Guenther, D. Gabbay. Dordrecht: Reidel, 1986, p. 117–124.
6. Mares E. Relevance Logic. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2024 Edition)*. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/spr2024/entries/logic-relevance> (accessed: 26.03.2024).
7. Mares E. Relevant logic and the theory of information. *Synthese* 109.3, 1996, p. 345–360.

<sup>13</sup> Аналогия здесь становится явной, если рассмотреть дополнительно семантический аналог (3).