Людвиг Витгенштейн — критик логицизма

З. А. Сокулер
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
zasokuler@mail.ru

Аннотация. Показывается, что в «Логико-философском трактате» Витгенштейн не придерживается фреге-расселовского логицизма: не основывает арифметику на логике, а представляет их параллельно на основе идей «формального понятия», «формальной операции» и «формального ряда». В среднем периоде своей творческой эволюции Витгенштейн прямо критикует и логицизм как идею, и его конкретные воплощения в «Principia Mathematica», стремясь показать, что эти построения не заменяют нашу обычную арифметику. Попытки доказать, что формализм «Principia» можно развить до десятичной записи чисел и обычной практики сложения и умножения «в столбик», потребуют доказательства того, что получилась действительно та же самая арифметика. Эти доказательства потребуют использования той же самой арифметики. DOI: 10.52119/LPHS.2024.56.87.007.

Ключевые слова: логицизм, арифметика, число, определение, Г. Фреге, Б. Рассел, Л. Витгенштейн, И. Кант, аналитическая истина.

Хотя Л. Витгенштейн был учеником Рассела и хотя в предисловии к «Логико-философскому трактату» [1] он упомянул только двух авторов, стимулировавших его мысль: Фреге и Рассела, — он никогда не придерживался логицизма в философии математики. Думаю, что объяснение этого надо искать в том обстоятельстве, что Фреге и Рассел были чистыми математиками, тогда как Витгенштейн был по образованию авиаинженером.

В «Логико-философском трактате» нет никакого сведения математики к логике. Вместо этого есть параллельное и однотипное представление математических и логических терминов как «формальных понятий», предложений логики и натуральных чисел как результатов формальных операций, образующих формальный ряд (см. 4.126, 4.1272).

К важности понятия формальной операции в «Логико-философском трактате» привлек внимание Паскуале Фрасколла [2]. Общее понятие операции дается в 6.01. Это индуктивное определение, показывающее, что для задания операции надо задать исходный объект (который обычно называют базисом индукции), произвольный член и *операцию*, посредством которой из любого члена получают следующий. Индуктивным определением, таким образом, задается *ряд*, образующийся последовательным применением одной и той же операции. В «Трактате» рассматриваются два вида формальных рядов — натуральные числа и предложения пропозициональной логики, что позволяет Витгенштейну рассматривать и те, и другие как знаковые конструкции, причем ни одна конструкция не может быть более «фундаментальной», «очевидной», чем другая.

В «Трактате» мы встречаем также очень беглую, почти конспективную критику фреге-расселовского определения числа (4.1272, 4.12721), расселовской теории типов (3.331–3.333; 6.123) и аксиомы бесконечности (4.1272).

Прямую критику расселовского логицизма мы встречам в [3] и [4]. Витгенштейновская критика касается не внутрилогических проблем. Она обусловлена тем, что Витгенштейн видит математику не так, как она выглядит для многих чистых математиков. Для него, это многогранная человеческая деятельность, тысячью нитей связанная с практиками своего использования. Редукция математики к логике становится бессмысленным занятием, если она затрудняет понимание того, как математика работает и как она используется: «Порочность логической техники состоит в том, что она заставляет нас забыть специальную математическую технику. В то время как логическая техника — лишь вспомогательная техника в математике. Например, она устанавливает известные связи между другими техниками» [3, с. 153]. С точки зрения Витгенштейна принципиальным пороком «расселовской системы» (таким выражением пользуется сам Витгенштейн, я не встречала у него упоминаний об Уайтхеде) является то, что она не позволяет такой элементарной вещи, как выполнение реальных арифметических вычислений. Этот недостаток незаметен, пока речь идет об очень малых числах, но становится очевидным, как только мы подумаем, например, о сложении шести- или восьмизначных чисел. Может показаться, что подобное возражение очень легко отвести, сказав, что в логицистской реконструкции арифметики можно было бы ввести по определению цифры десятичной системы, а затем и обычные приемы арифметических действий, которые мы все учили в детстве. Но для Витгенштейна это вовсе не решение названного затруднения [3, с. 71]. Вопрос в том, как мы будем проверять, что такая дополненная система будет, с одной стороны, тем же самым расселовским исчислением, а с другой — действительно соответствовать обычной арифметике. Подобный вопрос покажется странным для логика, который считает, что теория — это вневременная идеальная сущность, которая пребывает целиком и неизменной в своих аксиомах. Но это не так для Витгенштейна. Для него любые теории — это определенные практики, с помощью которых люди могут делать то или это. Тогда введение новых определений означает создание нового исчисления. Подобный взгляд на вещи обусловлен тем, что для Витгенштейна «исчисление само по себе» как идеальная сущность, неизменно пребывающая свернутой в самих исчислениях, — это пустая ненужная «проза». Он смотрит на те действия, которые люди станут производить со своими исчислениями. Введение тех или иных новых определений может изменить практики работы с этим исчислением, соответственно, и направление развития данного исчисления, что не было предзаложено в аксиомах. Витгенштейн убежден, что добавление в исчисление новых определений производит нечто весьма существенное: создает новую технику, новое использование исчисления. На это опять-таки может последовать то возражение, что ценность логистической переформулировки арифметики ничуть не теряется, ибо таким образом было окончательно доказано, что арифметические равенства — это аналитические предложения, вопреки утверждению Канта.

Действительно, Рассел заявляет, что он смог (при допущении бесконечного числа индивидов) не только определить в чисто логических терминах основные понятия системы Пеано, но и доказать чисто логическими средствами аксиомы Пеано. В таком случае арифметические равенства становятся аналитическими предложениями. Но Витгенштейн смотрит на это иначе. Он спрашивает: каким образом мы будем проверять, является ли логистический аналог равенства $7034174 + 6594321 = 13628495$ аналитическим предложением? Соответствующая тавтология имела бы, наверное, вид $p \;\&\; q \to s$, где p — предложение о существовании 7034174 объектов, q, соответственно, 6594321, а s — 13628495. Предположим, что такая формула была доказана, следовательно, является тавтологией (точнее, аналитическим предложением). Но как мы пришли к тому, что s действительно соответствует сумме слагаемых, т. е. числу 13628495? Только если мы: а) сначала осуществим сложение, как нас учили в обычной арифметике, б) пересчитаем, или снабдим числовыми индексами, все переменные в вышеуказанной формуле. Таким образом, попытки доказать, что логицистское представление арифметики действительно соответствует обычной арифметике, будут использовать привычные способы пересчета и арифметические действия.

Заметим, что во втором томе «Principia Mathematica», где развивается понятие арифметической суммы, не выражена забота о том, чтобы представить именно обычную арифметику и ее практики. Направленность работы тут несколько иная: «Трактовка сложения, умножения и экспоненциации… направляется желанием обеспечить наибольшую возможную общность. Во-первых, все, что должно быть сказано в общем об арифметических операциях, должно применяться в равной степени к конечным и бесконечным классам или кардиналам» [5, с. 117].

Что же касается претензии на надежное, бесспорное обоснование арифметики, достигаемое якобы благодаря ее погружению в логику, то навряд ли сейчас кто-то возьмется ее отстаивать. Витгенштейн же показывал, что даже доказательство того, что в логицистском исчислении воспроизведена именно арифметика, а не что-то другое, требует целого ряда допущений, которые нельзя назвать аналитическими.

Литература

1. Витгенштейн Л. *Логико-философский трактат* / пер. И. С. Добронравова и Д. Г. Лахути. 2-е изд., испр. и доп. М.: Канон+, 2008.
2. Frascolla P. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics.* L.; N.Y.: Routledge, 1994.
3. Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики. Витгенштейн Л. *Философские работы.* Часть II, кн. I. М.: Гнозис, 1994.
4. Wittgenstein L. *Wittgenstein's Lectures on the foundations of Mathematics: Cambridge, 1939* / ed. by C. Biamond. Sussex: Harvester Press, 1976.
5. Уайтхед А. Н., Рассел Б. *Основания математики: в 3 т.* Т. II. Самара: Самарский университет, 2006.