Некоторые вопросы построения для высказываний о двухместных отношениях аналога шестиугольника Бланше. Схема логических отношений подчинения и контрадикторности

О. В. Черкашина
Московский государственный университет; Московский центр исследования сознания
Ch.O.Logic@zohomail.com

Аннотация. Для выражения логических отношений между высказываниями о свойствах используется, наряду с логическим квадратом, шестиугольник Бланше. В настоящей работе предприняты шаги к тому, чтобы построить схему, аналогичную шестиугольнику Бланше, но для выражения логических отношений между высказываниями об отношениях — то есть для высказываний не с одноместным, а с n-местным предикатом, где $n > 1$, n — натуральное число. В настоящей работе сформулированы положения, требующиеся при построении такой схемы для разных n, а также построена исходная схема, основа для построения аналога такого шестиугольника для случая $n = 2$. Эта исходная схема выражает логические отношения подчинения и контрадикторности и позволяет проследить по крайней мере некоторые (возможно, все) отношения контрарности и субконтрарности между рассматриваемыми высказваниями. DOI: 10.52119/LPHS.2024.35.74.008.

Ключевые слова: шестиугольник Бланше, квазишестиугольник Ю. В. Ивлева, логический шестиугольник, логический многоугольник, логический квадрат, суждения об отношениях, высказывания об отношениях, исчерпывающая контрарность, исчерпывающая субконтрарность, логическая геометрия.

Для выражения отношений между высказываниями о свойствах используется, наряду с логическим квадратом, и несколько менее известная схема — шестиугольник Бланше (его сформулировали, независимо друг от друга, исследователи Robert Blanché и Augustin Sesmat — см., например, [1], [2]. См. рис. 1). Эта схема и ее вариации обладают рядом отличий от логического квадрата и рядом свойств, привлекающих исследователей (см., например, [3], [4] — собственно, весь названный выпуск журнала «Logica Universalis» посвящен логическому шестиугольнику).

Представляется интересным построить схему, аналогичную шестиугольнику Бланше, но, в отличие от него и от логического квадрата, для выражения логических отношений между высказываниями не о свойствах объектов, а об отношениях между объектами (то есть для высказываний не с одноместным, а с n-местным предикатом, где $n > 1$, n — натуральное число). Она будет достаточно масштабной, включая, даже для небольших n, значительное количество элементов и связей. В настоящей работе сформулированы положения, требующиеся при ее построении, а также построена исходная схема, способная служить основой для построения аналога такого шестиугольника для случая $n = 2$.

Построение и некоторые особенности шестиугольника Бланше. В числе отличий шестиугольника Бланше от логического квадрата — то, что первый содержит вершину Y, обозначающую ситуацию «некоторые, и только некоторые, но не все S есть P» (то есть, используя обозначения, принятые для логического квадрата, $Y = I\&O$), подобную вершине M, предложенной Н. А. Васильевым в 1910 году [5].

В отличие от треугольника противоположностей Н. А. Васильева, шестиугольник Бланше одновременно включает и все характерные для логического квадрата вершины, в том числе I — «Некоторые S есть P» и O — «Некоторые S не есть P». Шестиугольник Бланше добавляет к

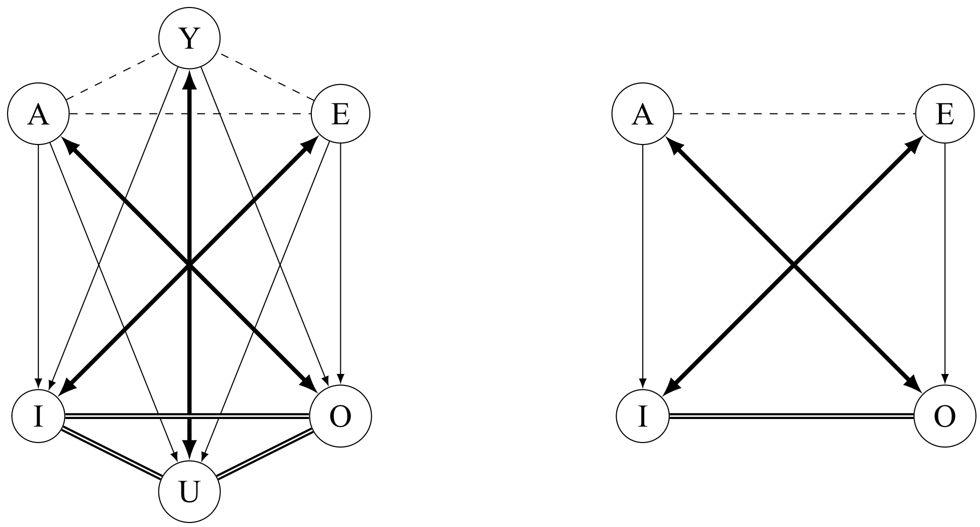

Рис. 1: Слева — одно из возможных графических представлений шестиугольника Бланше. Справа — логический квадрат. Толстые двойные стрелки выражают отношения контрадикторности, одинарные — подчинения, пунктир — контрарность, двойные линии — субконтрарность

этому вершину U ($U = A \vee E$) для выражения высказывания, контрадикторного высказыванию, обозначаемому вершиной Y. Сохраняются в шестиугольнике и вершины логического квадрата A — «Все S есть P» и E — «Все S не есть P», присущие также треугольнику Н. А. Васильева.

Сами логические отношения между высказываниями рассматриваемых форм на первый взгляд совпадают для квадрата и шестиугольника. Это отношения контрадикторности, подчинения, контрарности и субконтрарности. Определения стандартные. (Состоящие в отношении контрадикторности высказывания несовместимы и по истинности, и по ложности; одно из них является отрицанием другого. При отношении подчинения из истинности одного высказывания, называемого «подчиняющим», следует истинность другого, «подчиненного»; из истинности подчиненного не следует истинность подчиняющего, но из ложности подчиненного следует ложность подчиняющего (по контрапозиции); это отношение несимметрично. При отношении контрарности высказывания не могут быть одновременно истинными, но могут быть одновременно ложными. При субконтрарности высказывания могут быть одновременно истинными, но не могут быть одновременно ложными.)

При том что логические отношения, представленные в логическом квадрате и в шестиугольнике Бланше, являются одноименными, у них есть различие. В шестиугольнике Бланше истинным может быть только в точности одно из высказываний, находящихся в отношении контрарности с другими (в квадрате — одно или ни одного), и ложным может быть только в точности одно из высказываний, находящихся в отношении контрадикторности (в квадрате — одно или ни одного). При такой контрарности высказывания попарно несовместимы по истинности и все вместе несовместимы по ложности; при подобной субконтрарности высказывания попарно несовместимы по ложности и все вместе несовместимы по истинности. В связи с этим обстоятельством можно говорить о наличии в шестиугольнике Бланше не только классических двухместных, но и многоместных (в данном случае — трехместных) логических отношений: исчерпывающей k-местной контрарности и исчерпывающей k-местной субконтрарности (k — натуральное число, $k \geqslant 2$, при $k = 2$ исчерпывающая контрарность и и исчерпывающая субконтрарность совпадают между собой и с контрадикторностью).

Мы предполагаем обнаружить многоместные логические отношения и в подлежащем построению нами аналоге шестиугольника Бланше для высказываний об отношениях, однако не будем считать их наличие (или отсутствие) критерием того, является ли полученная схема действительно аналогом исходной схемы. Нас интересует в первую очередь аналогия в выборе вершин.

Может вызвать удивление наличие в шестиугольнике вершин для выражения конъюнкции и дизъюнкции высказываний, рассматриваемых в логическом квадрате. Однако это обстоятельство перестает удивлять, если посмотреть на то, что термин «некоторые» по умолчанию означает «по крайней мере некоторые, возможно все», то есть из m представителей множества S всех субъектов, о которых говорится в высказывании, свойством, выраженным предикатом P, обладают или s_1, или $s_2, \ldots$, или s_m (дизъюнкция нестрогая). Термин «все» означает, что этим свойством обладают и s_1, и $s_2, \ldots$, и s_m. При этом I можно рассматривать как «(только некоторые S есть P) или A», O — «(только некоторые S не есть P) или E».

Но почему из всех возможных сочетаний между четырьмя исходными вершинами логического квадрата в шестиугольнике Бланше использованы только одна конъюнкция и одна дизъюнкция? Вероятно, дело в том, что любые другие комбинации или эквивалентны высказываниям, обозначенным уже существующими вершинами ($A\&I = A$, $E\&O = E$, $A \vee I = I$, $E \vee O = O$), или всегда принимают значение «истина» ($A \vee O = E \vee I = T$; $I \vee O = T$), или всегда принимают значение «ложь» ($A\&O = E\&I = F$; $A\&E = F$).

В общем виде: для двух высказываний, состоящих между собой в отношении подчинения, их конъюнкция эквивалентна подчиняющему, а дизъюнкция — подчиненному высказыванию. Дизъюнкция высказываний, находящихся между собой в отношении контрадикторности или субконтрарности (несовместимых по ложности высказываний), всегда принимает значение «истина». Конъюнкция высказываний, состоящих между собой в отношении контрадикторности или контрарности (несовместимых по истинности высказываний), всегда принимает значение «ложь».

Верно и обратное: если конъюнкция всегда принимает значение «ложь», то ее элементы не могут быть одновременно истинными; если дизъюнкция всегда принимает значение «истина», то ее элементы не могут быть одновременно ложными. Возможно, такие вершины не выглядят очень интересными на первый взгляд, но их наличие в схеме позволяет (без дополнительных линий) выразить контрадикторность, контрарность, субконтрарность между высказываниями, входящими в состав соответствующих конъюнкции или дизъюнкции.

Аналог логического квадрата для высказываний о двухместных отношениях. Для того чтобы построить аналог шестиугольника Бланше для высказываний об n-местных отношениях, нужен сначала аналог логического квадрата для них. Задача построить такую схему для произвольных n была сформулирована Ю. В. Ивлевым и решена им для случая $n = 2$ в виде схемы под названием «логический квазишестиугольник» (рис. 2) в [6] (возможно, раньше — в [7]). Для произвольных n эта задача была решена нами (см., например, [8], [9]).

Ю. В. Ивлев сформулировал и правила отрицания таких высказываний: «При отрицании суждений об отношениях их качество и количество… меняются на противоположные» [10, с. 41]. То есть утвердительные — на отрицательные, обще-частные — на частно-общие и т. п. В на-

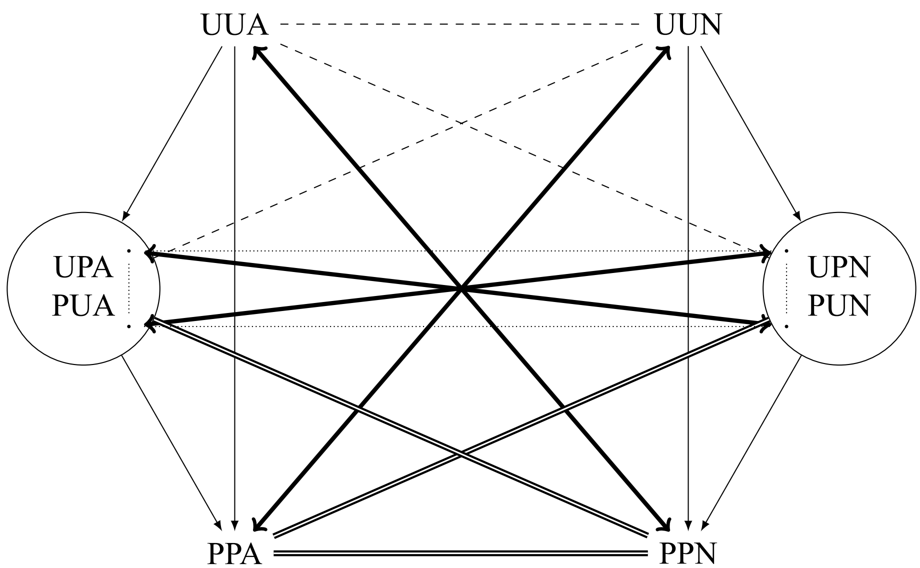

Рис. 2: Квазишестиугольник Ю. В. Ивлева. Линии, состоящие из точек, обозначают отношение независимости, отстутствующее в логическом квадрате и шестиугольнике Бланше. Прочие обозначения отношений те же, что на рис. 1. Обозначения вершин: U — «общее», P — «частное», A — «утвердительное», N — «отрицательное». В оригинале обозначения вершин даны на русском

стоящей работе мы берём это правило в качестве исходного положения.

Ему же принадлежит классификация высказываний об отношениях [10, см. с. 32, 38–41, 47–48, 118]. Такие высказывания различаются по количеству и качеству. По качеству они делятся на утвердительные (отсутствует отрицание предиката) и отрицательные. Характеристика по количеству является сложной и включает число элементов, соответствующее местности предиката (то есть равно n для каждого высказывания об n-местном отношении; предполагается, что на каждом месте предиката имеется квантифицированный субъект). Например, двухместное высказывание «Каждый юрист знает некоторого логика» — обще-частное, утвердительное (UPA), его количественная характеристика состоит из двух элементов. При записи на языке логики предикатов (5)

$$\forall x \exists y (S(x) \supset (Q(y) \& R(x,y))) \tag{5}$$

количественная характеристика высказывания выражается в том, какие кванторы имеются и на каких местах. Соответственно количественной и качественной характеристикам сформулированы обозначения вершин: U — «общее», P — «частное», A (Affirmative) — «утвердительное», N (Negative) — «отрицательное» (в оригинале обозначения вершин даны на русском, но сам принцип обозначения здесь сохранен).

Квазишестиугольник весьма удобен для $n = 2$, но при усложнении схемы требуется другое графическое представление, позволяющее сохранить информативность при упрощении внешней стороны. Такое представление было разработано нами. Для построения аналога шестиугольника Бланше при $n = 2$ будем также использовать нашу схему — логический многоугольник для высказываний об отношениях.

На рис. 3 представлен полный вид логического многоугольника для $n = 2$. Поскольку отношения контрарности и субконтрарности выразимы при помощи отношений контрадикторности и подчинения с использованием предложенных нами алгоритмов (см., например, [11]), при построении соответствующей схемы можно ограничиться двумя последними отношениями (на рис. 4 — стандартный, сокращенный вид нашей схемы). Обозначения вершин здесь даны на полях, каждая вершина находится на пересечении вертикальной и горизонтальной линий, идущих от обозначений соответственно качественной и количественной характеристик высказывания, обозначаемого этой вершиной. (Это только вопрос внешнего представления — здесь в силу множества линий, исходящих из каждой вершины, было бы неудобно помещать обозначения на самой вершине.)

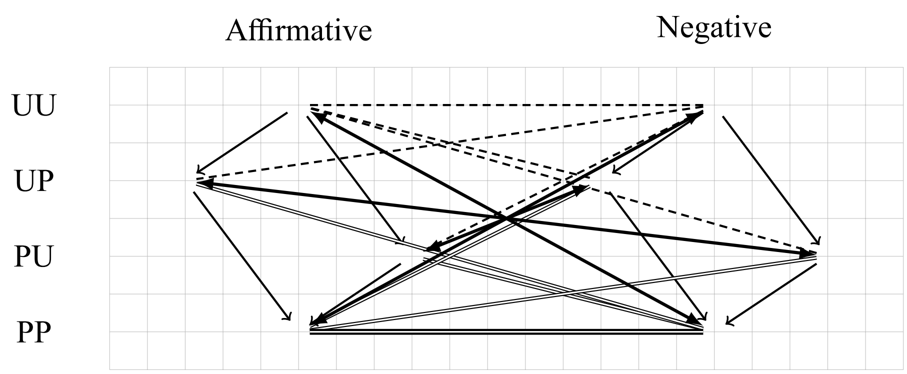

Рис. 3: Логический многоугольник для $n = 2$, выражающий отношения контрадикторности (двойные стрелки), подчинения (стрелки), контрарности (пунктирные линии) и субконтрарности (двойные линии)

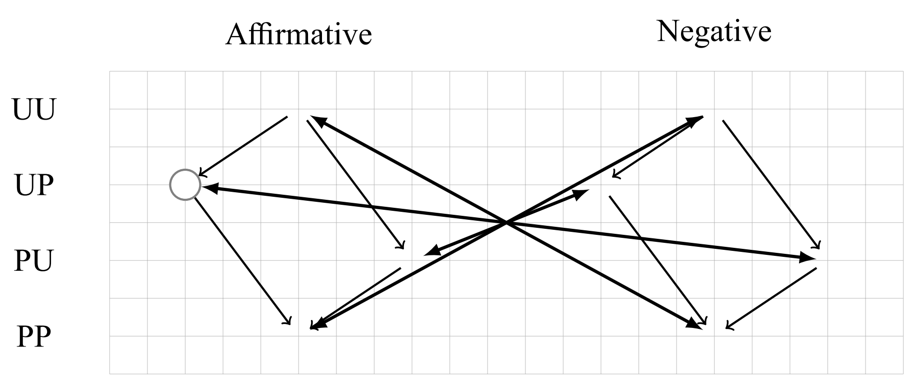

Рис. 4: Логический многоугольник для $n = 2$ в сокращенной, стандартной форме, выражающей отношения подчинения (простые стрелки) и контрадикторности (жирные двойные стрелки). Пример высказывания о двухместном отношении: «Каждый юрист знает некоторого логика» (обще-частное, утвердительное) отмечен на рисунке белым кругом

Поскольку высказывания об отношениях являются многоместными (имеют многоместный предикат и более одного квантифицированного субъекта), одному общему высказыванию (при записи на языке логики предикатов имеется квантор общности) могут быть подчинены и более одного частного, и одно частное (имеется квантор существования) может подчиняться более чем одному общему, а одно и то же высказывание может быть подчиняющим для одного высказывания и подчиненым для другого. Например, высказывание, имеющее форму 5, то есть обще-частное, утвердительное (UPA), есть подчиняющее для PPA и подчиненное для UUA. Отметим, что отношение подчинения является транзитивным.

Отношения подчинения между рассматриваемыми высказываниями имеют место в следующих случаях:

1) $A \ \& \ B$ — подчиняющее для A; $A \ \& \ B$ — подчиняющее для B;
2) A — подчиняющее для $A \vee B$; B — подчиняющее для $A \vee B$;
3) качественные характеристики двух высказываний совпадают, а количественная различается строго в одном элементе, на k-том месте (как, например, $UUUPUP$ и $UUPPUP$ различаются на третьем месте характеристики, где первая содержит U, а вторая — P). Высказывание, где на этом месте находится элемент U, является подчиняющим для другого, у которого на этом месте находится элемент P;
4) качественные характеристики двух высказываний совпадают, а количественная различается более чем в одном месте, причем у одного высказывания на всех местах, где есть различия, находится элемент U. Оно будет подчиняющим для второго высказывания, у которого на всех этих местах находится элемент P количественной характеристики. (Для сравнения: UPA и PUA не соответствуют этому правилу и находятся в отношении независимости, то есть совместимы и по истинности, и по ложности, но не находятся между собой и в отношении подчинения.)

Построение основы для аналога шестиугольника Бланше для высказываний об отношениях. Итак, у нас есть правила для отношений контрадикторности и подчинения, есть исходная фигура — логический многоугольник, есть правила его построения (см., например, [12]; здесь эти правила используются в части расположения графических элементов схем, но мы не останавливаемся на этом подробно). Мы уже могли бы построить схему, выражающую отношения подчинения и контрадикторности (а в силу взаимной выразмости — и отношений контрарности и субконтрарности, по крайней мере двухместных) между всеми рассматриваемыми высказываниями. Однако прежде нам нужно выявить, какие элементы подлежат рассмотрению, а какие — как и в случае с шестиугольником Бланше — можно расценивать как необязательные. Для этого выявим, какие дизъюнкции и конъюнкции являются всегда истинными и какие — всегда ложными. Чтобы это выявить, составим таблицу, выражающую, в каких логических отношениях находятся между собой исходные элементы, то есть высказывания о двухместных отношениях форм UUA, UPA, PUA, PPA, UUN, UPN, PUN, PPN. Чтобы узнать, каковы эти отношения, можно прибегнуть к помощи уже приведенных правила для отрицания и перечня случаев, в которых есть отношение подчинения, а также правил, представленных в [11]. Здесь мы рассмотрим только результат (таблица 1).

Мы не будем рассматривать конъюнкции и дизъюнкции для высказываний, находящихся в отношении подчинения, поскольку такие сочетания эквивалентны одному из элементов. Дизъюнкция высказываний, находящихся между собой в отношении контрадикторности или субконтрарности, всегда принимает значение «истина»; конъюнкция высказываний, состоящих между собой в отношении контрадикторности или контрарности, всегда принимает значение «ложь» — такие сочетания мы можем рассматривать, но обозначим соответствующие

	UUA	UPA	PUA	PPA	UUN	UPN	PUN	PPN
UUA	$\equiv$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	c	c	c	x
UPA	$\uparrow$	$\equiv$	0	$\downarrow$	c	0	x	s
PUA	$\uparrow$	0	$\equiv$	$\downarrow$	c	x	0	s
PPA	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\equiv$	x	s	s	s
UUN	c	c	c	x	$\equiv$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
UPN	c	0	x	s	$\uparrow$	$\equiv$	0	$\downarrow$
PUN	c	x	0	s	$\uparrow$	0	$\equiv$	$\downarrow$
PPN	x	s	s	s	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\equiv$

Таблица 1: Логические отношения исходных высказываний. Обозначения: $\equiv$ — эквивалентность, 0 — независимость, x — контрадикторность, $\downarrow$ — высказывание, названное в строке, есть подчиняющее для высказывания, названного в столбце, $\uparrow$ — высказывание, названное в строке, есть подчиненное для высказывания, названного в столбце, c — контрарность, s — субконтрарность

вершины, соответственно, знаком T и заполненным кругом для всегда истинных сочетаний и знаком F и пустым кругом для всегда ложных.

Теперь мы можем построить базовую схему, выражающую отношения подчинения для рассматриваемых высказываний и их сочетаний (рис. 5). Здесь мы обозначаем отношения подчинения линиями вместо стрелок, однако имеем в виду несимметричность этого отношения. На схеме подчиняющее высказывание всегда расположено выше подчиненного. Учитывая транзитивность подчинения, мы можем исключить из рассмотрения линии, соединяющие вершины непосредственно, в тех случаях, когда они также соединены через другие вершины.

Интересно отметить, что некоторые отношения подчинения тоже, вероятно, можно рассматривать как многоместные. Так, $UPA \ \& \ PUA$ не следует ни из UPA, ни из PUA по отдельности, но следует из обоих вместе. Аналогично для $UPN \ \& \ PUN$ и UPN, PUN.

Обратим внимание, что полученная схема (рис. 5) позволяет выразить (не)совместимость по истинности и по ложности необычным способом — при помощи соответствующих вершин и линий для отношений подчинения, без специальных линий для контрарности, субконтрарности и контрадикторности.

Совместимость по истинности можно видеть здесь следующим образом: проследить линии подчинения от обоих сопоставляемых высказываний вверх (в т. ч. через другие вершины) до обнаружения вершины, выражающей их конъюнкцию. Если соответствующая конъюнкция всегда ложна (это обозначено на схеме), сопоставляемые высказывания несовместимы по истинности. В противном случае они совместимы. Аналогично можно проследить совместимость по ложности, при этом ищется вершина, выражающая дизъюнкцию исходных высказываний, вниз. Если такая дизъюнкция не является всегда истинной, высказывания совместимы по ложности.

Впрочем, никто не может нам запретить построить соответствующую схему, дополненную линиями для контрадикторности (рис. 6). Мы можем даже исключить из рассмотрения в такой схеме вершины для всегда истинных и всегда ложных высказываний. Поскольку контрарность и субконтрарность выразимы через отношения контрадикторности и подчинения, такая схема по-прежнему сможет выражать те же логические отношения, что и логический квадрат.

Кроме того, описанный выше алгоритм проверки совместимости высказываний применим и для сокращенной схемы с той разницей, что если высказывания несовместимы, то соответствующая вершина, выражающая конъюнкцию или дизъюнкцию, будет просто отсутствовать.

Заключение. Мы рассмотрели построение и некоторые особенности шестиугольника Бланше для высказываний о свойствах. Сформулировали положения, связанные с построением этой схемы и применимые для построения аналогичных схем. С использованием логического многоугольника для высказываний об отношениях построили две схемы для высказываний о двухместных отношениях с набором вершин, аналогичным набору, представленному в шестиугольнике Бланше (фактически представленному набору — рис. 6; расширенному набору, который мог бы быть там представлен, — рис. 5). Мы не называем полученную схему готовым аналогом такого шестиугольника, поскольку надлежит прежде изучить отношения для каждой пары представленных здесь высказываний, а также предположительно присутствующие между такими высказываниями многоместные логические отношения. В дальнейшем предполагается исследование ряда возможностей полученных схем, в том числе для выражения с их помощью k-местных (k — натуральное число, $k > 2$) логических отношений и изучение таких отношений.

Литература

1. Blanché R. *Structures Intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts.* Paris: J. Vrin, 1969.

2. Sesmat A. *Logique II. Les Raisonnements. La syllogistique.* Paris: Hermann, 1951.

3. Smessaert H. The Classical Aristotelian Hexagon Versus Modern Duality Hexagon. *Logica Universalis* 6, 2012, p. 171–199.

4. Béziau J.-Y. The Power of the Hexagon. *Logica Universalis* 6, 2012, p. 1–43.

5. Васильев Н. А. О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого. Васильев Н. А. *Воображаемая логика. Избранные труды.* М.: Наука. 1989, с. 12–53.

6. Ивлев Ю. В. *Курс лекций по логике.* М.: Издательство Московского университета, 1988.

7. Ивлев Ю. В. *Логика.* Москва: РИО Академии МВД, 1976.

8. Черкашина О. В. Логический многоугольник для суждений об отношениях. *Логико-философские штудии*, 2018, т. 16, № 1–2, с. 194–195.

9. Cherkashina O. Figure of Opposition for Propositions about Relations. *Book of Abstracts, 6th World Congress on the Square of Opposition* / ed. by J.-Y. Beziau, A. Buchsbaum, I. Vandoulakis. 2018, p. 68–69.

10. Ивлев Ю. В. *Логика: Учебник.* 4-е изд., перераб. и доп. М.: ТК Велби; Проспект, 2008.

11. Черкашина О. В. Логический многоугольник для высказываний об отношениях: два правила для контрарности и субконтрарности. *Двенадцатые Смирновские чтения: Материалы международной научной конференции (Москва, 24–26 июня 2021 г.).* М.: РОИФН, 2021, с. 148–150.

12. Cherkashina O. Logical Polygon for Relations among Propositions About Relations: Symmetry. *Symmetry: Art and Science* 1–4, 2019, p. 86–89.

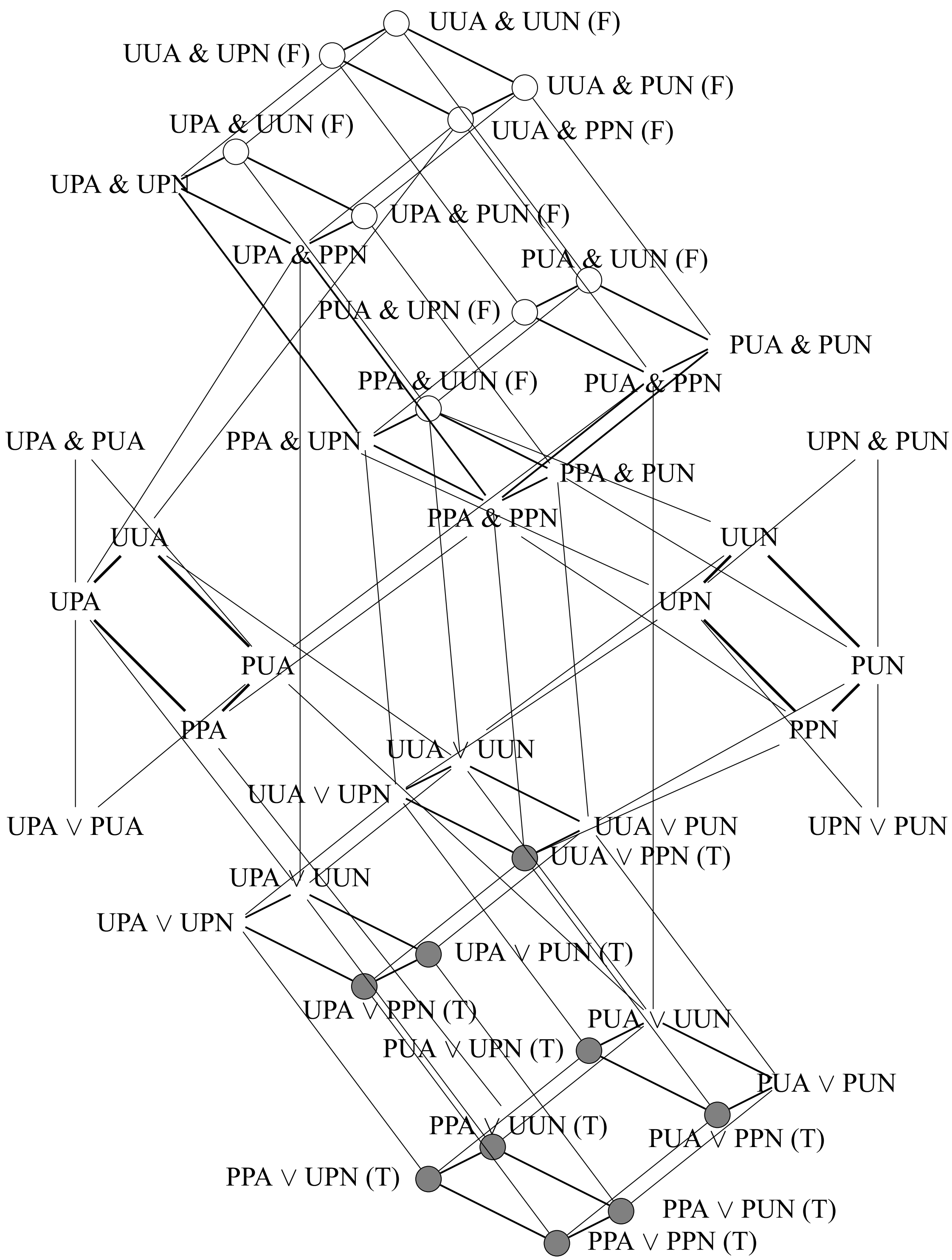

Рис. 5: Базовая схема, выражающая отношения подчинения для рассматриваемых высказываний и их сочетаний

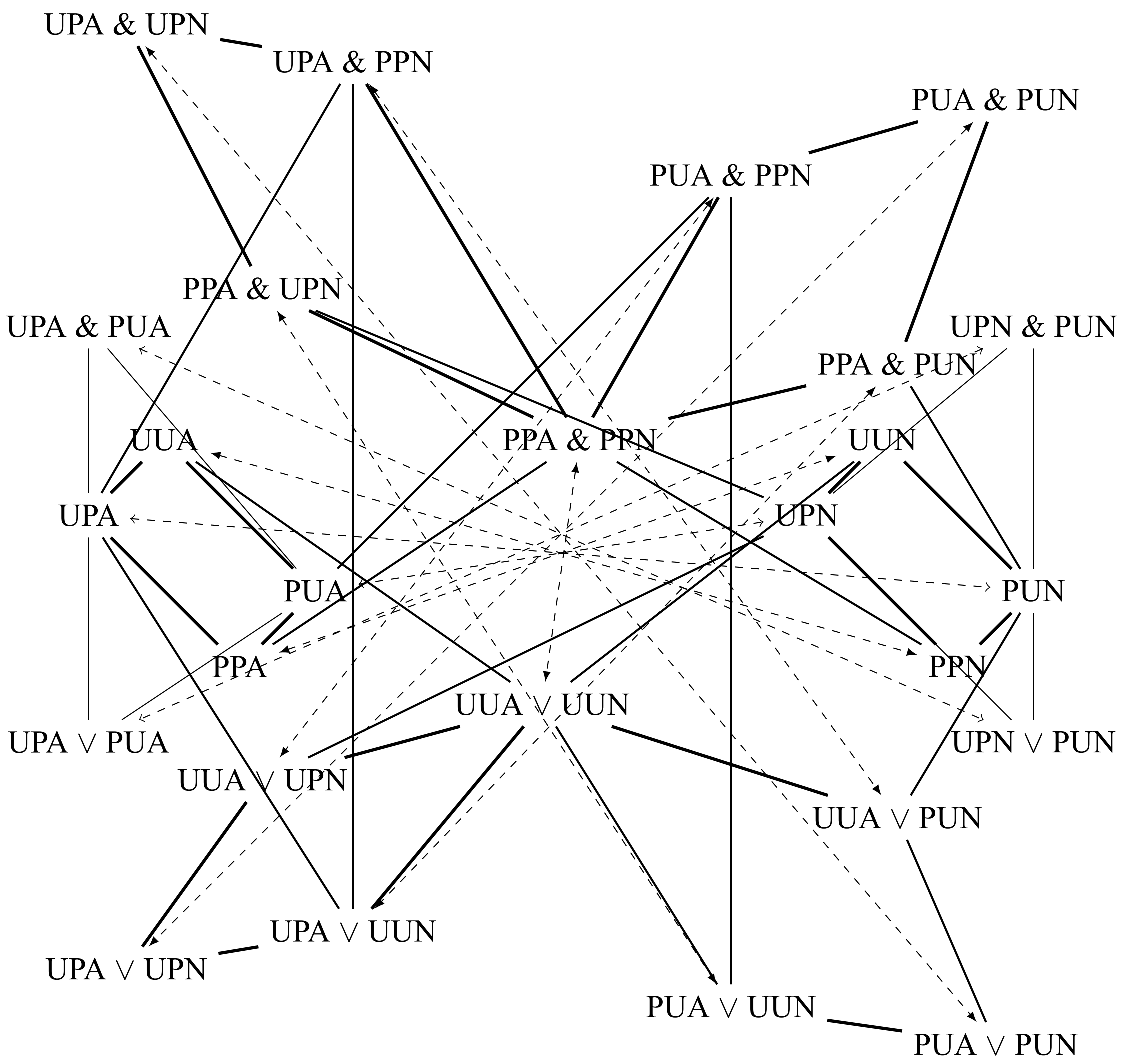

Рис. 6: Базовая схема, выражающая отношения подчинения (жирные линии) и контрадикторности (стрелки с пунктиром), без всегда истинных и всегда ложных элементов