Вторая теорема Гёделя о неполноте
не дезавуирует программу Гильберта

А.В. Бессонов, Новосибирский государственный университет
Институт философии и права СО РАН
trt@academ.org

Во второй теореме Гёделя о неполноте формальной арифметики Дедекинда–Пеано (PA) доказывается, что если PA непротиворечива, а предикат доказуемости удовлетворяет условиям Гильберта–Бернайса–Лёба, то формула

$$\exists x \forall y \neg \mathrm{Prov}(x, y), \qquad \text{(Consis)}$$

выражающая (формализующая в смысле Гёделя) непротиворечивость PA, не может быть доказана в PA. (Здесь $\mathrm{Prov}(x, y)$ — некоторая арифметическая формула, выражающая предикат доказуемости $\mathrm{Pr}(x, y)$, который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером формулы, а y — гёделевым номером ее доказательства; $\vdash$ означает доказуемость (в PA); $\ulcorner A \urcorner$ — нумерал, соответствующий гёделеву номеру формулы A; $\boldsymbol{n}$ — нумерал, соответствующий числу n.)

Обычно основанная на второй теореме критика гильбертовской программы финитного обоснования математики сводится к аргументации неосуществимости финитного доказательства непротиворечивости PA. Аргументируют следующим образом. Предположим, что PA непротиворечива и что найдется финитное доказательство ее непротиворечивости. По тезису фон Неймана (любое финитное доказательство формализуемо в PA) это доказательство можно было бы формализовать в PA. В результате оказалась бы доказуемой некоторая формула, выражающая непротиворечивость PA, что противоречило бы второй теореме о неполноте.

Покажем, что подобная аргументация некорректна.

Утверждение. *Вторая теорема Гёделя о неполноте не может использоваться в доказательстве нереализуемости гильбертовской финитистской программы.*

Доказательство. PA может быть или противоречивой, или непротиворечивой. Третьего не дано.

Пусть PA противоречива. Тогда вторая теорема о неполноте вообще не может быть применена, поскольку в ее формулировке содержится условие непротиворечивости PA.

Пусть PA непротиворечива. При этом не важно, имеется или нет какое-либо (финитное или нефинитное) доказательство ее непротиворечивости. Рассмотрим формулу $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})$ и повторим слово в слово вышеприведенную аргументацию по отношению к этой формуле. Предположим, что найдется финитное доказательство невыводимости этой формулы в PA. Тогда формула $\forall y \neg \mathrm{Prov}(\ulcorner \neg(\mathbf{0} = \mathbf{0}) \urcorner, y)$, выражающая факт невыводимости формулы $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})$, должна была быть доказуемой в PA. Однако из второй теоремы о неполноте следует, что ни для какой формулы A в PA не может быть доказана выражающая недоказуемость A формула

$$\forall y \neg \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner, y).$$

(Иначе по закону экзистенциального обобщения $\vdash$ Consis.) Отсюда ровно на тех же основаниях, по которым обычно делается вывод о невозможности финитного доказательства непротиворечивости PA, мы вправе сделать вывод о несуществовании финитного доказательства невыводимости в PA формулы $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})$ в предположении о непротиворечивости PA.

Однако недоказуемость формулы $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})$ при условии непротиворечивости PA доказывается совершенно элементарно методом от противного. Предположим, что формула $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})$ доказуема. Тогда, учитывая $\vdash (\mathbf{0} = \mathbf{0})$, следовало бы $\vdash (\mathbf{0} = \mathbf{0}) \,\&\, \neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})$, т. е. PA была бы противоречивой, что противоречит предположению. И данное доказательство очевидно финитно! В нем никак не используются ни аксиома полной индукции, ни, тем более, трансфинитная индукция.

Мы пришли к противоречию: если PA непротиворечива, то из второй теоремы о неполноте следует несуществование финитного доказательства недоказуемости в PA формулы $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})$. Но такое доказательство существует! Это означает, что основанная на второй теореме аргументация против осуществимости программы Гильберта изначально некорректна, поскольку из нее следует абсурдный вывод о невозможности финитного доказательства недоказуемости формулы $\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})$ в PA при условии непротиворечивости последней.

Таким образом, вторая теорема Гёделя о неполноте не может использоваться в доказательстве нереализуемости гильбертовской программы и при условии непротиворечивости PA, следовательно, она вообще не может использоваться в таком доказательстве.

Доказательство утверждения закончено. Очевидно, что доказательство утверждения в целом также финитно.

Наш результат, конечно, не доказывает непротиворечивость PA. Из него не следует даже *возможность* такого финитного доказательства. Все, что мы сделали, так это опровергли хрестоматийное положение, согласно которому вторая теорема Гёделя о неполноте свидетельствует о *невозможности* финитного доказательства непротиворечивости PA.

Данное положение безусловно относится к важнейшим в философии математики. В его сетях запутался сам Гёдель ошибочно, как мы убедились, связав вторую теорему с аргументацией против осуществимости гильбертовской финитистской программы. Об это положение споткнулись Дж. фон Нейман, П. Бернайс и многие другие логики и философы. Да и сам Д. Гильберт воспринял результаты Гёделя как свидетельство необходимости пересмотра доктрины финитизма в ее оригинальном понимании.

Мы показали, что вторая теорема Гёделя о неполноте никак не вынуждает использование финитной точки зрения “некоторым более сильным образом”. Перефразируя известное высказывание Г. Крайзеля, можно сказать, что вторая теорема о неполноте не имеет отношения ни к какой разумной постановке вопроса о реализуемости гильбертовской программы финитного обоснования математики.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-18-10359).